Annexe A

Techniques de démonstration

Bien sûr que ma moustache est vraie !
Elle appartient même à mon frère Zeppo.
Groucho Marx

A.1 Logique des propositions

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques notions de logique qui permettent de mieux comprendre ce qu'est une démonstration mathématique. Vous pouvez laisser de côté l'aspect formel et retenir uniquement quelques idées, en particulier concernant l'implication.
On considère une collection de *variables propositionnelles* $\mathcal{V}$, et on définit de façon inductive les *propositions* logiques à partir de ces variables.

1. Si $x \in \mathcal{V}$ est une variable propositionnelle, $P = x$ est une proposition logique.
2. Étant données deux propositions P, Q déjà construites, on définit de nouvelles propositions à l'aide de *connecteurs logiques* :
   (a) $\neg P$ (lire non P) est une nouvelle proposition,
   (b) $P \wedge Q$ (lire P et Q) est une nouvelle proposition,
   (c) $P \vee Q$ (lire P ou Q) est une nouvelle proposition,
   (d) $P \implies Q$ (lire P implique Q) est une nouvelle proposition,
   (e) $P \iff Q$ (lire P équivaut Q) est une nouvelle proposition.

Par exemple, à partir de deux variables propositionnelles x et y, on peut construire les propositions logiques suivantes : $P_1 = x \vee y$, $P_2 = (x \vee y) \implies x$, $P_3 = (x \vee y) \wedge ((x \vee y) \implies x) \ldots$
Dans la pratique, une variable propositionnelle représente un énoncé qui peut être vrai ou faux. Voici des exemples de variables :
– x : « mon chien est blanc » ,
– y : « toute fonction dérivable est continue » ,
– z : « il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres entiers » ;
En mathématiques, on s'intéresse surtout aux relations existantes entre les énoncés. Par exemple si f est une fonction définie sur $[a, b]$, on peut considérer les variables propositionnelles suivantes :
– x : « la fonction f est continue sur $[a, b]$ »
– y : « $f(a) \leqslant 0$ » ,
– z : « $f(b) \geqslant 0$ » ,
– t : « il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ » .
Chaque variable peut prendre la valeur logique V (pour vrai) ou F (pour faux). Par exemple, il existe des fonctions qui ne sont pas continues, donc x peut prendre la valeur V ou F, il en est de même pour y, z et t. Nous pouvons construire à partir de ces variables une proposition logique $P = (x \wedge y \wedge z) \implies t$ et citer le théorème des valeurs intermédiaires en affirmant que la proposition P est vraie.
Formellement, on définit un *environnement* comme une application $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow \{V, F\}$ qui assigne une valeur V (vrai) ou F (faux) à chaque variable propositionnelle et on définit de façon inductive *l'évaluation* $V_\sigma(P)$ d'une proposition P dans l'environnement σ de la façon suivante.

1. Si $P = x$ est une variable, la valeur de vérité de la proposition P est la même que celle de la variable : $V_\sigma(P) = \sigma(x)$.

2. Si $\tilde{P} = \neg P$ où P est une proposition, $V_\sigma(\tilde{P}) = V$ lorsque $V_\sigma(P) = F$ et $V_\sigma(\tilde{P}) = F$ lorsque $V_\sigma(Q) = V$. On résume cette règle dans une *table de vérité* :

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(\neg P)$
V	F
F	V

3. Si $\tilde{P} = P \wedge Q$ où P et Q sont deux propositions, $V_\sigma(\tilde{P}) = V$ uniquement lorsque $V_\sigma(P) = V$ et $V_\sigma(P) = V$. Il y a quatre possibilités pour $V_\sigma(P)$ et $V_\sigma(Q)$ que l'on résume dans une *table de vérité* :

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \wedge Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

4. Si $\tilde{P} = P \vee Q$, $V_\sigma(\tilde{P})$ est définie par la table de vérité :

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \vee Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. Si $\tilde{P} = P \implies Q$,

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \implies Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6. Si $\tilde{P} = P \iff Q$,

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \iff Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On dit que deux propositions P et Q sont *logiquement équivalentes* et on note $P \equiv Q$, lorsque pour tout environnement σ, $V_\sigma(P) = V_\sigma(Q)$. En d'autres termes, deux propositions sont logiquement équivalentes si, quelles que soient les valeurs de vérité affectées aux variables, les deux propositions s'évaluent de la même manière. Pour montrer que deux propositions sont logiquement équivalentes, il suffit de dresser les tables de vérité des deux propositions et de vérifier qu'elles sont identiques.
Si P et Q sont deux propositions logiques, les propositions $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ sont logiquement équivalentes (on note P à la place de $V_\sigma(P)$ désormais) :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

De la même façon, on vérifie que $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$. Ces équivalences logiques s'appellent les lois de DeMorgan.

A.1.1 L'implication

En mathématiques, on part d'un très petit nombre de faits que l'on suppose vrais (les *axiomes*) et, à l'aide de règles logiques, on *démontre* de nouveaux résultats appelés *théorèmes*, *lemmes*, *propositions*, *corollaires*, ...
Les énoncés mathématiques utilisent souvent l'implication logique. Une des raisons de son importance est la suivante : on connaît déjà un résultat représenté par une proposition P (on sait que $V_\sigma(P) = V$) et par un raisonnement, on montre que la proposition $P \implies Q$ est vraie : ($V_\sigma(P \implies Q) = V$). En examinant la table de vérité de l'implication, la seule ligne où simultanément $V_\sigma(P) = V$ et $V_\sigma(P \implies Q) = V$ est la première ligne dans laquelle $V_\sigma(Q) = V$. On en déduit ainsi que la proposition Q est vraie.

Remarque 1.1 Examinez attentivement la table de vérité de l'implication : *une proposition* P $\Longrightarrow$ Q *est toujours vraie, sauf lorsque* P *est vraie et* Q *est fausse*. Un exemple surprenant : considérons les propositions
– x : « tous les entiers sont pairs »,
– y : « tous les entiers sont impairs »,
– P : « si tous les entiers sont pairs, alors tous les entiers sont impairs ».
La proposition x est fausse : $\sigma(x) = \text{F}$, ainsi que la proposition y : $\sigma(y) = \text{F}$. La proposition P s'écrit en logique P = $x \Longrightarrow y$. Cette proposition est vraie : $V_\sigma(\text{P}) = \text{V}$! En effet, c'est la quatrième ligne de la table de vérité. Ce résultat est surprenant car nous avons l'habitude de considérer une implication P $\Longrightarrow$ Q uniquement dans le cas où P est vraie !

Pour montrer qu'une implication P $\Longrightarrow$ Q est vraie, on utilise deux méthodes importantes.

1. *Le raisonnement direct :* il consiste à montrer que la deuxième ligne de la table de vérité de l'implication P $\Longrightarrow$ Q est impossible. On suppose que P est vraie : $V_\sigma(\text{P}) = \text{V}$ et on justifie que nécessairement Q est vraie : $V_\sigma(\text{Q}) = \text{V}$. On peut affirmer alors que $V_\sigma(\text{P} \Longrightarrow \text{Q})$ est vraie. En effet, lorsque $V_\sigma(\text{P}) = \text{F}$, quelle que soit la valeur de vérité de Q, on a toujours $V_\sigma(\text{P} \Longrightarrow \text{Q}) = \text{V}$ et on a exclu le cas où $V_\sigma(\text{P}) = \text{V}$ et $V_\sigma(\text{Q}) = \text{F}$.
2. *Le raisonnement par contraposée :*il consiste également à éliminer la deuxième ligne de la table de vérité. On suppose que Q est fausse ($V_\sigma(\text{Q}) = \text{V}$ correspond aux lignes 2 et 4 puisqu'aux lignes 1 et 3, on a $V_\sigma(\text{P} \Longrightarrow \text{Q}) = \text{V}$), et on justifie que $V_\sigma(\text{P}) = \text{F}$.

Remarque 1.2 Une autre façon de comprendre le raisonnement par contraposée consiste à vérifier que les deux propositions P $\Longrightarrow$ Q et $\neg$Q $\Longrightarrow$ $\neg$P sont logiquement équivalentes :

P	Q	$\neg$Q	$\neg$P	$\neg$Q $\Longrightarrow$ $\neg$P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

On montre alors que $\neg$Q $\Longrightarrow$ $\neg$P est vraie avec un raisonnement direct : on suppose que $\neg$Q est vraie (c'est-à-dire Q fausse) et on justifie que $\neg$P est vraie (c'est-à-dire P fausse).

Exemple 1.1 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$(f \text{ impaire}) \Longrightarrow \big(f(0) = 0\big).$$

Utilisons un raisonnement direct. On suppose que f est impaire : pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. En particulier pour $x = 0$, on obtient $f(0) = -f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

Exemple 1.2 Soit x un réel positif. Montrer que

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\big) \Longrightarrow (x = 0).$$

Raisonnons par contraposée : si $x \neq 0$, alors on a $x > 0$. En prenant $\varepsilon = x/2$, on a $\varepsilon > 0$ et $x > \varepsilon$ ce qui montre que la première proposition est fausse.

Remarque 1.3 On utilise souvent le *raisonnement par l'absurde* en mathématiques. On veut montrer qu'une proposition Q est vraie. On suppose Q fausse et on aboutit à une absurdité.
Formellement, on utilise une suite d'implications $\neg\text{Q} \Longrightarrow \text{Q}_1$, $\text{Q}_1 \Longrightarrow \text{Q}_2, \ldots, \text{Q}_{n-1} \Longrightarrow \text{Q}_n$ toutes vraies, avec la proposition Q_n qui est fausse.

Exemple 1.3 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel : il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = p/q$. En élevant au carré, $2q^2 = p^2$, mais alors 2 apparaîtrait à une puissance paire dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$, alors qu'il apparaît avec une puissance paire dans la décomposition de p^2. On aboutit à une contradiction avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier(voir le théorème 20.18 page 757). On généralise cette preuve pour montrer que si un nombre p est premier, le réel $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Remarque 1.4 N'abusez pas des raisonnements par contraposée ou par l'absurde ! Un raisonnement direct est *toujours* plus clair et plus simple à rédiger. On se lance dans un raisonnement par contraposée uniquement lorsqu'on n'a pas réussi à trouver une preuve directe.

On vérifie l'équivalence logique

$$\text{P} \Longrightarrow \text{Q} \equiv \neg\text{P} \vee \text{Q}.$$

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

En utilisant les lois de DeMorgan, on obtient alors une technique standard pour nier une implication :

$$\neg(P \implies Q) \equiv P \wedge (\neg Q).$$

En pratique, pour montrer qu'une implication $P \implies Q$ est fausse, on vérifie que P est vraie, alors que Q est fausse.
Une autre équivalence logique importante :

$$(P \iff Q) \equiv [(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)].$$

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Ce résultat aura une conséquence importante en mathématiques : pour montrer qu'une équivalence $P \iff Q$ est vraie, on montre séparément que les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$ sont vraies.

A.2 Ensembles

La quasi-totalité des énoncés mathématiques s'exprime à l'aide de notations ensemblistes. La théorie précise des ensembles est compliquée et inutile pour nous. Il suffit de comprendre quelques notations et règles intuitives pour pouvoir traiter convenablement tout le programme des classes préparatoires.

`À faire : reprendre note historique du cours`

Un *ensemble* peut être compris intuitivement comme une collection d'objets appelés *éléments*. Lorsqu'un objet x *appartient* à l'ensemble E, on notera $x \in E$. S'il n'appartient pas à l'ensemble, on notera $x \notin E$.
On dit qu'un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F et on note $E \subset F$ lorsque tous les éléments de E sont également éléments de F. On dit alors que l'ensemble E est une *partie* de l'ensemble F.
Un axiome de la théorie des ensembles affirme qu'il existe un ensemble particulier, *l'ensemble vide* qui ne contient aucun élément et qui est noté $\varnothing$. Cet ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.
On dit que deux ensembles E et F sont égaux et on note $E = F$ lorsque $E \subset F$ et $F \subset E$. Cela signifie que les deux ensembles ont les mêmes éléments.
Nous supposerons connus quelques ensembles fondamentaux, comme l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$ ... : ($0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ...).
Nous allons définir les ensembles de deux façons :

1. En listant un nombre fini de ses éléments, par exemple : $F = \{1,2,3\}$. Les éléments d'un ensemble peuvent être eux-mêmes des ensembles. On peut par exemple définir l'ensemble $G = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ formé de deux éléments qui sont eux-mêmes des ensembles (on a par exemple $\varnothing \subset G$, $\varnothing \in G$, $\{\varnothing\} \subset G$, $\{\varnothing\} \in G$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin G$).
2. En utilisant un ensemble E déjà construit et une proposition $\mathscr{P}(x)$ qui dépend d'un élément $x \in E$. On peut définir l'ensemble formé des éléments de E pour lesquels la propriété $\mathscr{P}$ est vraie :

   $$F = \{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}.$$

   On peut par exemple définir l'ensemble des réels strictement positifs de cette façon : $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Exemple 1.4 On peut définir les ensembles suivants :
– $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$: l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
– $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$: cet ensemble est formé de deux éléments $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
– $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$: l'ensemble des racines cubiques de l'unité.

Remarque 1.5 Il est nécessaire à notre niveau d'utiliser toujours un ensemble E connu pour définir un nouvel ensemble sous peine d'aboutir rapidement à des paradoxes inextricables ! Par exemple, peut-on considérer l'ensemble F de tous les ensembles qui ne se contiennent pas ? Si on note E l'ensemble formé de tous les ensembles (à supposer qu'un tel ensemble existe), on pourrait définir F par :

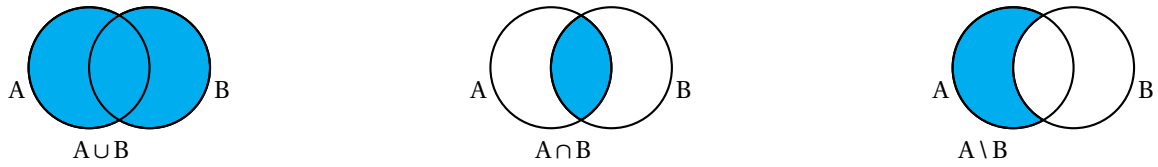
$$F = \{x \in E \mid x \notin x\}.$$

Mais que penser de l'objet F ?

– Si $F \in F$, alors par définition de F, on aurait $F \notin F$ ce qui est contradictoire,
– Si $F \notin F$, alors par définition de F, $F \in F$ ce qui est aussi contradictoire.
On voit qu'on ne peut pas parler de l'ensemble E formé de tous les ensembles !

À partir d'ensembles E et F déjà définis, nous pouvons construire de nouveaux ensembles :

1. *L'union* de deux ensembles est un nouvel ensemble noté $E \cup F$. Ses éléments sont les éléments qui sont dans E ou dans F.
2. *L'intersection* de deux ensembles est un nouvel ensemble noté $E \cap F$. Ses éléments sont les éléments qui sont à la fois dans E et dans F.
3. *La différence* d'un ensemble E et d'un ensemble F noté $E \setminus F$ est un nouvel ensemble. Ses éléments sont les éléments de E qui ne sont pas dans F.
4. *Le complémentaire* d'une partie $A \subset E$, notée A^c est un nouvel ensemble formé des éléments de E qui ne sont pas dans A : $A^c = E \setminus A$.



À partir de deux ensembles E et F, on définit un nouvel ensemble noté $E \times F$ qui s'appelle le *produit cartésien* des ensembles E et F. Pour deux éléments $x \in E$ et $y \in F$, on définit le *couple* (x, y) et $E \times F$ est l'ensemble dont les éléments sont tous les couples de cette forme.

Remarque 1.6 Attention, les couples (x, y) et (y, x) sont deux objets distincts, contrairement à l'ensemble $\{x, y\} = \{y, x\}$ où l'ordre des éléments est indifférent. On dit que deux couples $(x, y) \in E \times F$ et $(x', y') \in E \times F$ sont égaux lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

On définit par exemple $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comme étant l'ensemble formé des couples de réels. On généralise cette notion à des produits cartésiens d'un nombre fini d'ensembles : $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.
Si E est un ensemble, on peut également définir l'ensemble des *parties* de E noté $\mathscr{P}(E)$. Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont les sous-ensembles de E. Par exemple, si $E = \{0, 1, 2\}$, $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Les ensembles $\varnothing$ et E sont toujours des éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Exemple 1.5 Si $E = \mathbb{N}$, les notations suivantes sont correctes : $\varnothing \subset \mathscr{P}(E)$, $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$, $1 \notin \mathscr{P}(E)$, $\{1\} \notin E$, $\{1\} \subset E$, $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$ ...

A.3 Quantificateurs

On étend la logique des propositions en ajoutant l'utilisation de *quantificateurs* $\forall$ et $\exists$ qui se lisent respectivement *quel que soit* et *il existe*. Nous pourrons parler de propositions de la forme
– $P : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x \leqslant y$
– $Q : \exists x \in \mathbb{R} :\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant y$
Si $\mathscr{P}(x)$ est un *prédicat*, c'est-à-dire une proposition dépendant d'un élément x appartenant à un ensemble E,
– la proposition

$$P : \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$$

est vraie lorsque *pour tout* élément $x \in E$, la proposition $\mathscr{P}(x)$ prend la valeur V,
– la proposition

$$Q : \exists x \in E :\ \mathscr{P}(x)$$

est vraie lorsqu'*il existe* au moins un élément $x \in E$ pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x)$ prend la valeur V.

Exemple 1.6
– La proposition $P : \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x + 1$ est vraie.
– La proposition $P : \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0$ est fausse, car pour $x = 0$, la propriété $\mathscr{P}(x) : x^2 - 1 = 0$ n'est pas vraie.
– La proposition $P : \exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 1 = 0$ est vraie car la propriété $\mathscr{P}(x) : x^2 - 1 = 0$ est vérifiée pour $x = 1$ par exemple.

Remarque 1.7 La proposition « $P : \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » utilise une lettre x, mais ne dépend pas d'un élément particulier $x \in E$. On dit que x est une *variable muette*. On peut écrire la même proposition avec une autre variable muette : $P : \forall y \in E,\ \mathscr{P}(y)$.

Remarque 1.8 On note $\exists ! x \in E :\ \mathscr{P}(x)$ pour dire qu'il existe *un unique* élément $x \in E$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}(x)$. Pour montrer une unicité en mathématiques, on suppose que deux éléments $x \in E$ et $x' \in E$ vérifient $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$ et on montre qu'alors $x = x'$.

Il est très important de savoir nier une proposition avec quantificateurs. Si P est la proposition

$$P\ :\ \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x),$$

la négation de la proposition P, $\neg P$ s'écrit à l'aide du quantificateur $\exists$:

$$\neg P :\ \exists x \in E :\ \neg \mathscr{P}(x).$$

En Français : « il existe au moins un élément x de E pour lequel la propriété $\mathscr{P}(x)$ est fausse ».
De même, la négation de la proposition

$$Q\ : \exists x \in E :\ \mathscr{P}(x)$$

s'écrit à l'aide du quantificateur $\forall$

$$\neg Q :\ \forall x \in E,\ \neg \mathscr{P}(x)$$

En Français : « Pour tous les éléments x de E, la propriété $\mathscr{P}(x)$ est fausse.

Remarque 1.9 La négation de la proposition $P\ : \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ n'est pas $\forall x \in E,\ \neg\, \mathscr{P}(x)$.
Par exemple, si P est la proposition « tous les chats sont noirs », sa négation n'est pas « tous les chats ne sont pas noirs », mais « il existe au moins un chat qui n'est pas noir ».

On peut alors écrire de façon automatique la négation d'une proposition faisant intervenir plusieurs quantificateurs.
– $P : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha < \varepsilon$ se nie en $\neg P\ : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha \geqslant \varepsilon$.
– $P : \exists x \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x = ny$ se nie en $\neg P :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} :\ \forall y \in \mathbb{R}, x \neq ny$
– En se rappelant que la négation de la proposition $P \implies Q$ est logiquement équivalente à $(\neg P \wedge Q)$, on nie la proposition :

$$P\ : \forall x \in \mathbb{R}, \left[(\exists n \in \mathbb{N} :\ n \leqslant x) \implies (\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant x)\right]$$

$$\neg P\ : \exists x \in \mathbb{R} :\ (\exists n \in \mathbb{N} :\ n \leqslant x) \wedge (\exists p \in \mathbb{N} :\ p < x)$$

Multimédia : Exerciseur pour nier une prop. à quantificateurs

A.4 Plans de démonstration

On réserve en mathématiques l'usage de quantificateurs pour l'énoncé des définitions et des théorèmes. Pour *prouver* un résultat, on écrit une *démonstration* qui se base sur une démarche logique.
Pour montrer par exemple qu'une proposition $P\ : \forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ est vraie, il faut vérifier que la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie *pour tout* élément x dans l'ensemble E. On considère pour cela un élément $x \in E$ *quelconque* et une fois cet élément donné, on vérifie que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vraie. Le fait de considérer un élément $x \in E$ quelconque se traduit dans une preuve par le mot clé *soit* : Soit $x \in E$. Il est indispensable de bien comprendre le sens de ce mot « soit » en mathématiques. Méditez les deux images suivantes :

1. Une personne extérieure vous donne un élément $x \in E$ *de son choix* : vous n'avez pas le droit de choisir vous même un élément x qui vous arrange ! Vous devez démontrer que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour cet élément x qu'on vous a imposé. Imaginez que la personne extérieure doute de votre preuve, elle peut choisir un élément x le plus embêtant pour vous. Vous devez être capable de la convaincre que votre raisonnement fonctionne pour tous les x qu'elle choisira.
2. Imaginez que vous deviez écrire un programme informatique. Ce programme utilise des *paramètres*. Les utilisateurs vont utiliser votre programme avec des valeurs de leur choix pour le paramètre. Pour convaincre votre employeur que votre programme fonctionne, vous devrez prouver qu'il renvoie le bon résultat *pour toute valeur* du paramètre.

Pour montrer qu'une proposition $P :\ \exists x \in E :\ \mathscr{P}(x)$ est vraie, il vous suffit *d'exhiber* un élément x *de votre choix* dans l'ensemble E pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie. On utilise souvent pour cela le mot clé « *Posons* $x =$ ».

Exemple 1.7 Montrer que la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \ x < y^2$$

est vraie. Voici un exemple de démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$, étudions plusieurs cas qui recouvrent toutes les possibilités.

1. Si $x < 0$, posons $y = 0$ et on a bien $x < y^2 = 0$.
2. Si $0 \leqslant x < 1$, posons $y = 1$ et on a bien $x < y^2 = 1$.
3. Si $x > 1$, posons $y = x$, on a bien $x < x^2 = y^2$.

On peut également utiliser une propriété connue Q pour justifier l'existence d'un élément : « *d'après* Q, *il existe* $x \in$ E vérifiant $\mathscr{P}(x)\ldots$ ».

Exemple 1.8 Montrer l'implication :

$$\underbrace{\forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \leqslant y < n+1}_{(i)} \implies \underbrace{\forall \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : \ n\alpha \leqslant x < (n+1)\alpha}_{(ii)}.$$

Faisons un raisonnement direct en supposant la propriété (i) vraie et montrons (ii).

Soit $\alpha > 0$,

soit $x \in \mathbb{R}$,

d'après (i), en prenant $y = x/\alpha$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant y < n+1$

par conséquent, puisque $\alpha > 0$, $n\alpha \leqslant x < (n+1)\alpha$.

Il est important de réfléchir à *l'ordre des quantificateurs* dans une proposition logique.
– On peut inverser deux quantificateurs $\forall$ successifs,
– On peut inverser deux quantificateurs $\exists$ successifs,
– On ne peut pas inverser deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple 1.9

1. La proposition P : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} : \ z \geqslant x$ et $z \geqslant y$ signifie que si l'on se donne deux réels x et y, alors il existe un réel z *qui dépend de* x et y plus grand à la fois que x et y.
2. La proposition Q : $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} : \ z \geqslant x$ et $z \geqslant y$ signifie la même chose : qu'on vous donne d'abord x puis y revient à vous donner d'abord y puis x. Les propositions P et Q sont logiquement équivalentes (ici elles sont vraies toutes les deux).
3. La proposition R : $\exists z \in \mathbb{R} : \ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\ , z \geqslant x$ et $z \geqslant y$ signifie qu'il existe un réel z *universel* (c'est-à-dire qu'il ne dépend de rien) tel que pour tous réels x et y, z soit plus grand que x et y. Cette proposition est fausse, alors qu'elle ne diffère de P et Q que par l'ordre des quantificateurs.

Remarque 1.10 L'ordre des quantificateurs dans une proposition induit des *dépendances* entre les objets. C'est une source fréquente d'erreurs de raisonnement. Nous verrons quelques exemples typiques plus tard.

L'essentiel de votre travail en mathématiques cette année va consister à écrire des preuves de résultats. Ces démonstrations vont utiliser les définitions du cours qu'il faudra comprendre de façon précise. Ces définitions sont écrites à l'aide de quantificateurs, mais on les retient comme un *plan de démonstration* : « que dois-je faire pour montrer que ... ».

Exemple 1.10 On considère une fonction $f : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'elle est *paire* lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. On dit qu'elle est *impaire* lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. On dit que f est la fonction nulle lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Montrons en utilisant ces définitions l'équivalence :

$$\underbrace{\big(f \text{ paire et impaire}\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(f \text{ est la fonction nulle}\big)}_{(ii)}$$

Commençons par écrire un plan de démonstration correspondant à la propriété à démontrer. Pour montrer une équivalence, on montre deux implications. L'ébauche de plan commence donc par :

$(i) \implies (ii)$:

$(ii) \implies (i)$:

Pour montrer $(i) \implies (ii)$, on fait un raisonnement direct. On suppose la proposition (i) vraie (on s'en servira comme *hypothèse* dans la démonstration), et il faut démontrer la proposition (ii) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Le plan devient :

$(i) \implies (ii)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\ldots\ f(x) = 0$

$(ii) \implies (i)$:

De même pour l'implication $(ii) \implies (i)$, on suppose (ii) vraie (hypothèse) et on veut montrer (i) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$. Le plan complet s'écrit donc :

$(i) \implies (ii)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\ldots\ f(x) = 0$

$(ii) \implies (i)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\ldots f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.

Complétons maintenant ce plan pour écrire une preuve complète :

$(i) \implies (ii)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

puisque f est paire, $f(-x) = f(x)$ et puisque f est impaire, $f(-x) = -f(x)$.

En retranchant ces deux égalités, on obtient $2f(x) = 0$ d'où $f(x) = 0$.

$(ii) \implies (i)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Puisque f est la fonction nulle, $f(-x) = 0$ et $f(x) = 0$.

Par conséquent, $f(-x) = -f(x) = f(x) = 0$.

On a vu sur cet exemple la démarche à effectuer pour écrire une preuve.

1. Écrire au brouillon le *plan de démonstration* correspondant au résultat à montrer.
2. On complète au brouillon la démonstration en utilisant aux différents endroits les *hypothèses*. Remarquez que l'on cite précisément les hypothèses utilisées dans la démonstration finale : ce n'est pas à la personne qui vous lit de deviner d'où viennent les propriétés que vous utilisez, c'est à vous de l'indiquer clairement.
3. On rédige au propre la démonstration finale en mettant en évidence le plan de démonstration suivi. On a numéroté les deux propositions (i) et (ii), on indique clairement ce qu'on montre : $(i) \implies (ii)$... On passe souvent à la ligne pour rendre la preuve plus lisible...

Exemple 1.11 Une définition très importante en analyse : on dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant \mathrm{N}) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on utilise donc le plan suivant :

PLAN 1.1 : Convergence d'une suite

1. Soit $\varepsilon > 0$

2. Posons N = ...

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

4. Supposons $n \geqslant \mathrm{N}$

5. *On a* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Que signifie ce plan ?

1. *Soit* $\varepsilon > 0$: vous demandez à une personne extérieure de vous donner un $\varepsilon > 0$ de *son* choix (aussi petit qu'elle veut !)
2. *Posons* N = … : en fonction de cet $\varepsilon > 0$ qu'elle vous a donné, vous devez *construire* un entier N (qui dépend bien sûr de ε).
3. *Phase de vérification :* vous ne pouvez pas définir n'importe quel entier N, il faut qu'il satisfasse la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathrm{N} \implies |u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Pour vérifier que cette propriété à quantificateur est vraie :
   (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}$: vous demandez un entier n à la personne extérieure.
   (b) En utilisant l'entier n qu'elle vous a donné, vous devez démontrer l'implication $(n \geqslant \mathrm{N}) \implies |u_n - l| \leqslant \varepsilon$ Pour cela, on utilise le raisonnement direct. On suppose que la propriété $(n \geqslant \mathrm{N})$ est vraie : *On prend* $n \geqslant \mathrm{N}$. On vérifie alors que le choix de notre N permet de conclure que la propriété $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ est également vraie.

Montrons que la suite $(1/n)$ converge vers 0 en utilisant le plan de démonstration qui découle de la définition.

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *Posons* $N = E(1/\varepsilon)+1$ (où $E(1/\varepsilon)$ désigne la partie entière du réel $1/\varepsilon$, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à $1/\varepsilon$).
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n \geqslant N$.
4. Avec la définition de la partie entière, $E(1/\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < E(1/\varepsilon)+1$ d'où $\frac{1}{\varepsilon} < N$ et, puisque $n \geqslant N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ et finalement on conclut : $|u_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

Remarquez que l'entier N que vous avez construit dépend explicitement du « paramètre » ε que la personne vous a donné. Votre démonstration peut se traduire par un programme informatique : l'utilisateur entre le $\varepsilon > 0$ de son choix et votre programme renvoie l'entier N calculé à partir de la formule ci-dessus. Vous avez justifié que le programme renvoie toujours un entier N vérifiant la propriété souhaitée.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons apprendre à traduire des définitions à quantificateurs par des plans de démonstration et nous entraîner à écrire des preuves en utilisant ces plans. Nous avons choisi des exemples portant sur les ensembles et les applications car ils sont simples et instructifs. La démarche suivie s'étend à tout le cours d'algèbre et d'analyse avec des définitions plus compliquées.

Multimédia : l'utilisateur choisit des quantificateurs et variables et le programme écrit le plan de démonstration correspondant. Inverse : on propose une phrase à quantifica et il faut écrire le plan.

A.4.1 Plans de preuves ensemblistes

Voici deux définitions ensemblistes et les plans de preuve associés.

DÉFINITION 1.1 **Inclusion d'ensembles**
Un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F si et seulement si $\forall x \in E, x \in F$

PLAN 1.2 : Inclusion d'ensemble

1. Soit $x \in E$
2. ...
3. $x \in F$

DÉFINITION 1.2 **Égalité d'ensembles**
On dit que deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

PLAN 1.3 : Égalité d'ensembles

1. *Montrons que* $E \subset F$ *:*
   (a) Soit $x \in E$,
   (b) ... $x \in F$.
2. *Montrons que* $F \subset E$ *:*
   (a) Soit $x \in F$,
   (b) ... $x \in E$.

Exemple 1.12 Soient trois ensembles A, B, C. Montrer que

$$\underbrace{(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C)}_{(i)} \Longrightarrow \underbrace{(B \subset C)}_{(ii)}.$$

Supposons la proposition (i) vraie et montrons que la proposition (ii) est vraie (raisonnement direct).

Soit $x \in B$

Puisque $x \in B$, Étudions deux cas complémentaires
– Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ donc d'après (i), $x \in A \cap C$ et donc $x \in C$.
– Si $x \notin A$, alors puisque $x \in B$, $x \in A \cup B$ donc d'après (i), $x \in A \cup C$. Puisque $x \notin A$, $x \in C$.

Dans les deux cas, on a montré que $x \in C$.

Exemple 1.13 Soient trois ensembles A, B, C. Montrer que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1. Montrons que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Soit $x \in A \cap (B \cup C)$

   On sait que $x \in A$ et que $x \in B \cup C$. Puisque $x \in B \cup C$, il y a deux cas possibles :
   – si $x \in B$, alors à fortiori, $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   – si $x \in C$, alors à fortiori, $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Dans les deux cas, on aboutit à la conclusion que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

   Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Puisque x appartient à une union, on étudie les deux cas :
   – $x \in (A \cap B)$, alors comme $x \in B$, à fortiori, $x \in B \cup C$ et comme $x \in A$, finalement $x \in A \cap (B \cup C)$.
   – $x \in (A \cap C)$, $x \in C$ d'où $x \in B \cup C$ et comme $x \in A$, $x \in A \cap (B \cup C)$.

   Dans les deux cas, on aboutit à la conclusion que $x \in A \cap (B \cup C)$.

Remarque 1.11 Remarquez comment nous avons respecté les plans correspondant aux définitions. Dites-vous bien que si vous voulez montrer que $E \subset F$ et que vous écrivez :

Posons $x = \ldots$,

$x \in E$

$x \in F$

votre professeur ne prendra pas la peine de lire votre copie : vous êtes *hors sujet*. Ce que vous écrivez peut être intéressant, mais *ne démontre pas* que $E \subset F$. Vous n'avez pas suivi le plan de démonstration correspondant à la propriété à montrer. Il est très important d'écrire au brouillon (au moins dans un premier temps), le plan de démonstration et de bien comprendre *ce que vous devez faire* pour montrer le résultat. Avec un peu d'habitude, le brouillon deviendra inutile et vous aurez en tête ce plan à tout moment.

Exercice 1.1 ♡

Soient trois ensembles A, B, C. *Montrer que*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Solution :

$\subset$ *: soit* $x \in A \cup (B \cap C)$. *Étudions deux cas :*
– $x \in A$, *alors* $x \in A \cup B$ *et* $x \in A \cup C$ *et donc* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
– $x \in B \cap C$ *: comme* $x \in B$, $x \in A \cup B$ *et comme* $x \in C$, $x \in A \cup C$. *Par conséquent,* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\supset$ *: soit* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

On a $x \in A \cup B$ *et* $x \in A \cup C$. *Étudions deux cas complémentaires :*
– $x \in A$, *alors* $x \in A \cup (B \cap C)$.
– $x \notin A$, *alors comme* $x \in A \cup B$, $x \in B$. *De même, puisque* $x \in A \cup C$, $x \in C$. *Par conséquent,* $x \in (B \cap C)$ *et donc* $x \in A \cup (B \cap C)$.
Dans les deux cas, on a montré que $x \in A \cup (B \cap C)$.

Exercice 1.2 ♡

Soient A *et* B *deux ensembles. On définit leur* différence symétrique *par :*

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a. Comparer les ensembles $A \triangle (B \cup C)$ *et* $(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

b. Soient $A, B, C \subset E$ *trois parties d'un ensemble* E. *Montrer que*

$$\underset{(i)}{(A \triangle B = A \triangle C)} \iff \underset{(ii)}{(B = C)}.$$

Solution :

a. – *Montrons que* $A\triangle(B\cup C)\subset(A\triangle B)\cup(A\triangle C)$.

Soit $x\in A\triangle(B\cup C)$*, par définition de la différence symétrique,* $x\in A\cup(B\cup C)$ *et* $x\notin A\cap(B\cup C)$*. Puisque* $x\in A\cup B\cup C$*, étudions trois cas :*
– *si* $x\in A$ *: puisque* $x\notin B\cup C$*,* $x\notin B$*, donc* $x\in A\triangle B$*.*
– *si* $x\in B$ *:* $x\notin A$ *d'où* $x\in A\triangle B$*.*
– *si* $x\in C$ *:* $x\notin A$ *d'où* $x\in A\triangle C$*.*
Dans les trois cas, on obtient que $x\in(A\triangle B)\cup(A\triangle C)$*.*

– *Montrons qu'en général, l'inclusion réciproque est fausse. Il suffit pour cela* d'exhiber un contre-exemple*. Considérons quatre entiers distincts* a,b,c,d *et posons* $A=\{a,b\}$*,* $B=\{b,c\}$ *et* $C=\{d\}$*. On calcule* $A\triangle(B\cup C)=A\triangle\{b,c,d\}=\{a,c,d\}$ *alors que* $(A\triangle B)\cup(A\triangle C)=\{a,c\}\cup\{a,b,d\}=\{a,b,c,d\}$*.*

b. Pour montrer une équivalence, on montre deux implications :

$(ii)\implies(i)$ *est évidente.*

$(i)\implies(ii)$ *: supposons* (i) *vraie et montrons que* (ii) *est vraie (raisonnement direct).*

Montrons que $B\subset C$ *:*

Soit $b\in B$*, étudions deux cas complémentaires :*

si $b\in A$*, alors* $b\notin A\triangle B$ *donc d'après* (i)*,* $x\notin A\triangle C$ *et donc* $b\in C$*.*

si $b\notin A$*, alors* $b\in A\triangle B=A\triangle C$ *d'où* $b\in C$*.*

Montrons que $C\subset B$ *: la preuve est similaire.*

Exercice 1.3 ♡

Soient deux ensembles E *et* F*. Quelle relation y a-t-il*

a. entre les ensembles $\mathscr{P}(E\cup F)$ *et* $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)$ *?*

b. entre les ensembles $\mathscr{P}(E\cap F)$ *et* $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$ *?*

c. entre les ensembles $\mathscr{P}(E\times F)$ *et* $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(F)$ *?*

Solution :

a. Montrons que $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)\subset\mathscr{P}(E\cup F)$*.*

Soit $A\in\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)$*. Étudions les deux cas possibles :*
– *Si* $A\in\mathscr{P}(E)$*, cela signifie que* $A\subset E$ *et donc que* $A\subset E\cup F$*. Par conséquent,* $A\in\mathscr{P}(E\cup F)$*.*
– *De même si* $A\in\mathscr{P}(F)$*.*

L'inclusion réciproque est fausse, comme le montre l'exemple $E=\{e\}$*,* $F=\{f\}$ *(avec* $e\neq f$*) :* $\mathscr{P}(E\cup F)=\{\varnothing,\{e\},\{f\},\{e,f\}\}$ *et* $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)=\{\varnothing,\{e\},\{f\}\}$*.*

b. Montrons que $\mathscr{P}(E\cap F)=\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$*.*
– $\mathscr{P}(E\cap F)\subset\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$*.*

Soit $A\in\mathscr{P}(E\cap F)$*. On a* $A\subset E\cap F$*.*

Puisque $A\subset E$*,* $A\in\mathscr{P}(E)$

Puisque $A\subset F$*,* $A\in\mathscr{P}(F)$*.*

Par conséquent, $A\in\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$*.*

– $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)\subset\mathscr{P}(E\cap F)$*.*

Soit $A\in\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$*.*

Comme $A\in\mathscr{P}(E)$*,* $A\subset E$*.*

De même puisque $A\in\mathscr{P}(F)$*,* $A\subset F$*.*

Donc $A\subset E\cap F$ *et donc* $A\in\mathscr{P}(E\cap F)$*.*

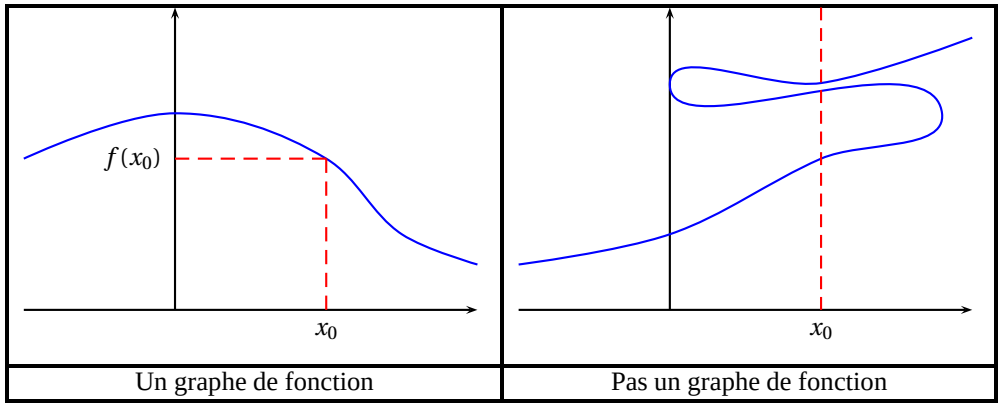
c. Il n'y a aucune inclusion entre les deux ensembles, comme le montre le contre-exemple suivant : $E=\{e\}$ *et* $F=\{f\}$*.* $E\times F=\{(e,f)\}$*,* $\mathscr{P}(E\times F)=\{\varnothing,\{(e,f)\}\}$*. D'autre part,* $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{e\}\}$*,* $\mathscr{P}(F)=\{\varnothing,\{f\}\}$ *et* $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(F)=\{(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{f\}),(\{e\},\varnothing),(\{e\},\{f\})\}$*.*

A.4.2 Plans de démonstrations pour les applications

Applications

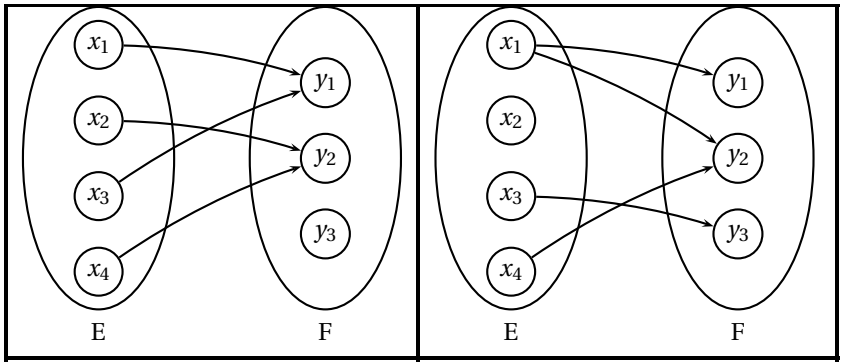
DÉFINITION 1.3 ♡♡ **Application**
On considère deux ensembles E et F. Une *application* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est une correspondance qui à tout élément $x \in \mathrm{E}$ associe *un unique* élément noté $f(x)$ de l'ensemble F.

Remarque 1.12 On définit plus formellement une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ par son *graphe*. C'est une partie $\mathrm{G} \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ vérifiant la propriété : $\forall x \in \mathrm{E},\ \exists!\ y \in \mathrm{F} :\quad (x, y) \in \mathrm{G}$. On dit que cet unique élément $y = f(x)$ est *l'image* de l'élément x par l'application f. Pour une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, son graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = x_0$ rencontre le graphe en un unique point (x_0, y_0).



Un graphe de fonction	Pas un graphe de fonction

Exemple 1.14 Lorsque les ensembles E et F sont finis, on peut représenter une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ par un diagramme sagittal. On trace une flèche partant de chaque élément $x \in \mathrm{E}$ vers son *image*, l'unique élément $y = f(x) \in \mathrm{F}$.



Une application	Pas une application

Le premier diagramme sagittal représente une application. Par exemple $f(x_3) = y_1$, $f(x_4) = f(x_2) = y_2$. Le graphe de f s'écrit $\mathrm{G} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_2)\}$. La deuxième figure ne représente pas une application pour deux raisons : l'élément x_1 possède deux images et l'élément x_2 n'a pas d'image.

Remarque 1.13 On définit l'*application identité* d'un ensemble E par $\mathrm{id}_\mathrm{E} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$.

DÉFINITION 1.4 ♡♡ **Égalité de deux applications**
On dit que deux applications $f, g : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ sont égales lorsque

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = g(x).$$

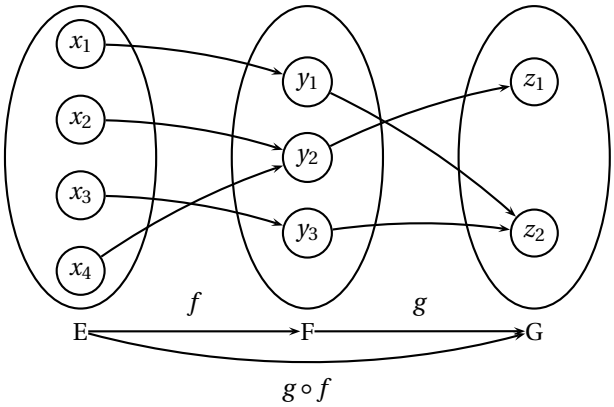
PLAN 1.4 : Égalité de deux applications

1. Soit $x \in \mathrm{E}$,
2. ...
3. $f(x) = g(x)$.

Composée d'applications

DÉFINITION 1.5 ♡♡ **Composée d'applications**
Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux applications. On définit une nouvelle application notée $g \circ f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G}$ en posant $\forall x \in \mathrm{E},\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Exemple 1.15 Sur le diagramme sagittal ci-dessous, on a par exemple $(g \circ f)(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g(y_1) = z_2$



Remarque 1.14 À chaque fois que vous voyez une composée d'applications, assurez-vous que l'ensemble d'arrivée de la première est inclus dans l'ensemble de départ de la seconde. Il est conseillé de faire des *schémas de composition*

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$$

Remarque 1.15 La composée est « associative » : si $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \xrightarrow{h} \mathrm{H}$ sont trois applications, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Remarque 1.16 Si $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$, $f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = f$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ f = f$.

Applications injectives, surjectives

DÉFINITION 1.6 ♡♡♡ **Injectivité**
On dit qu'une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est *injective* lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$$

On en déduit le plan de démonstration important

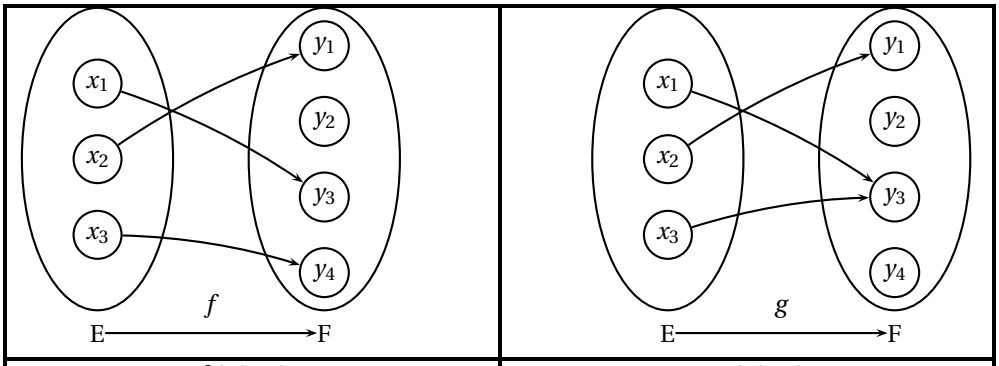
PLAN 1.5 : Injectivité

1. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.
2. Supposons que $f(x) = f(y)$,
3. ...
4. $x = y$.

Remarque 1.17 La définition précédente n'est pas très intuitive. Pour la comprendre, traduisons ce que signifie le fait qu'une fonction n'est *pas* injective en niant la proposition à quantificateurs :

$$\exists (x, y) \in \mathrm{E}^2 : \quad [f(x) = f(y)] \wedge [x \neq y]$$

Une fonction n'est pas injective lorsqu'il existe deux éléments distincts x, y ayant la même image. Une autre façon de traduire que f est injective consiste à dire que tout élément $y \in \mathrm{F}$ possède *au plus* un antécédent.



f injective	g non injective

L'application g de l'exemple ci-dessus n'est pas injective puisque $x_1 \neq x_3$ et pourtant $g(x_1) = g(x_3) = y_3$. L'application f est elle injective. Remarquons que tout élément de F possède au plus un antécédent par f (l'élément y_2 n'en possède pas).
Pourquoi choisir comme définition de l'injectivité $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(y) \implies x = y$? Simplement parce que cette définition se prête le mieux aux démonstrations directes ! En supposant que $f(x) = f(y)$, on dispose d'une hypothèse intéressante dans la preuve : il suffit de résoudre cette équation et montrer que $x = y$.

Exemple 1.16 Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+2y) \end{array} \right.$ est injective.

Soient $\mathrm{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{X}' = (x',y') \in \mathbb{R}^2$.

On suppose que $f(\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}')$, c'est-à-dire (égalité de deux couples) $\left\{ \begin{array}{ll} x+y & = x'+y' \\ x+2y & = x'+2y' \end{array} \right.$.

En retranchant la première ligne à la deuxième, on obtient $y = y'$ puis $x = x'$.

On a donc $\mathrm{X} = (x,y) = (x',y') = \mathrm{X}'$.

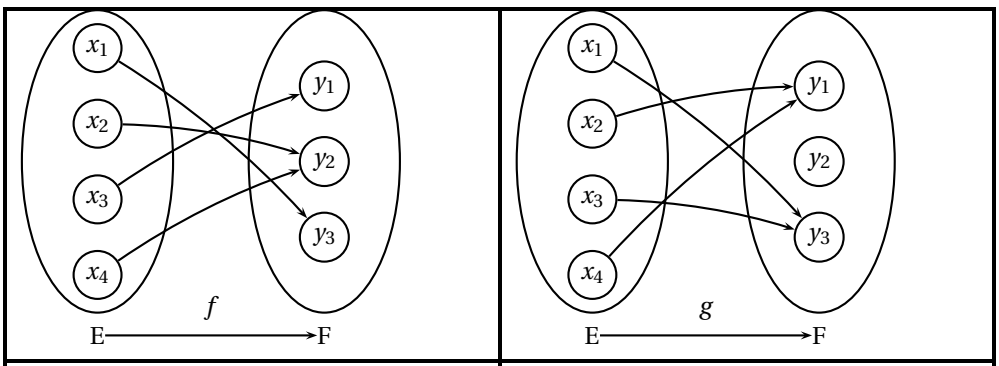
DÉFINITION 1.7 ♡♡♡ **Application surjective**
On dit qu'une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est *surjective* lorsque

$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{E} :\ y = f(x).$$

PLAN 1.6 : Application surjective

1. Soit $y \in \mathrm{F}$.
2. Posons $x = \ldots$
3. $y = f(x)$.

Remarque 1.18 Une application est surjective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F possède au moins un antécédent.



f surjective	g non surjective

L'application g du schéma n'est pas surjective car y_2 n'a pas d'antécédent.

Exemple 1.17 Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+2y) \end{array} \right.$ est surjective.

Soit $\mathrm{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Posons $\mathrm{X} = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1)$.

Alors $f(\mathrm{X}) = \big(2y_1 - y_2 + y_2 - y_1, 2y_1 - y_2 + 2(y_2 - y_1)\big) = (y_1, y_2) = \mathrm{Y}$.

Remarque 1.19 Il arrive souvent dans les démonstrations qu'on ait à construire un objet, sans qu'on voit de façon évidente comment le définir. On utilise alors un raisonnement d'*analyse-synthèse* :
– dans une partie *analyse*, on suppose que l'objet qu'on cherche vérifie les propriétés voulues,
– on trouve que nécessairement l'objet doit être d'une forme particulière,
– on rédige une partie *synthèse* en *posant* l'objet qu'on a trouvé et on vérifie qu'il convient.
Sur notre exemple, on pourrait rédiger la preuve de la façon suivante.

Soit $\mathrm{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Analyse : supposons que $\mathrm{X} = (x_1, x_2)$ vérifie $f(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$. On doit avoir

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = y_1 & : \mathrm{L}_1 \\ x_1 + 2x_2 & = y_2 & : \mathrm{L}_2 \end{cases}$$

En faisant $\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$, on trouve que nécessairement $x_2 = y_2 - y_1$ et ensuite que $x_1 = 2y_1 - y_2$ d'où $\mathrm{X} = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1)$.

Synthèse : Posons $\mathrm{X} = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1)$. On a bien $f(\mathrm{X}) = \big(2y_1 - y_2 + y_2 - y_1, 2y_1 - y_2 + 2(y_2 - y_1)\big) = (y_1, y_2) = \mathrm{Y}$.

Cette façon de rédiger permet d'expliquer comment on a abouti à la démonstration. Remarquez que si l'on supprime la partie analyse, on a respecté scrupuleusement le plan de preuve de la surjectivité.

Exemple 1.18 Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$\underset{(i)}{\big(f \text{ injective}\big)} \Longleftrightarrow \underset{(ii)}{\big(f \text{ surjective}\big)}$$

Pour montrer l'équivalence, montrons deux implications :

1. $(i) \implies (ii)$: en supposant (i) vraie, montrons que f est surjective.

   Soit $y \in \mathrm{E}$,

   puisque $f \circ f \circ f = f$, on a $f\big(f \circ f(y)\big) = f(y)$, mais puisque f est injective, $f \circ f(y) = y$.

   Posons $x = f \circ f(y)$,

   On a bien $y = f(x)$.

2. $(ii) \implies (i)$:

   Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.

   Supposons que $f(x) = f(y)$.

   Puisque f est surjective, il existe $x' \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(x')$ et il existe $y' \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(y')$. Alors $f \circ f(x') = f \circ f(y')$. En appliquant f, on obtient $f \circ f \circ f(x') = f \circ f \circ f(y')$ et puisque $f \circ f \circ f = f$, on trouve que $f(x') = f(y')$

   On a donc $x = f(x') = f(y') = y$.

Exercice 1.4 ♡

Soit E *un ensemble non vide et* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *une partie de* E. *On définit l'application*

$$\varphi_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{X} \cap \mathrm{A} \end{array} \right. .$$

a. Déterminer l'application φ_{A} *lorsque* $\mathrm{E} = \{a, b\}$ *et* $\mathrm{A} = \{a\}$. *Dans ce cas, l'application* φ_{A} *est-elle injective, surjective ?*

b. Montrer que $(\varphi_{\mathrm{A}}$ injective $) \implies (\mathrm{A} = \mathrm{E})$.

c. Montrer que $(\varphi_{\mathrm{A}}$ surjective $) \implies (\mathrm{A} = \mathrm{E})$.

Solution :

a. *On peut ici lister les éléments de* $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. *Il suffit de calculer l'image de chacun de ces éléments :* $\varphi_A(\varnothing) = \varnothing$, $\varphi_A(\{a\}) = \{a\}$, $\varphi_A(\{b\}) = \varnothing$, $\varphi_A(\{a,b\}) = \{a\}$. *On voit que l'application n'est pas injective puisque* $\varphi_A(\{a,b\}) = \varphi_A(\{a\})$ *alors que* $\{a,b\} \neq \{a\}$ *et que* φ_A *n'est pas surjective puisque* $\{a,b\}$ *n'a pas d'antécédent.*

b. *Montrons le résultat par contraposée :*

Supposons $A \neq E$, *il existe* $b \in E \setminus A$.

Posons $A' = A \cup \{b\}$, *on a* $A \neq A'$

et $\varphi_A(A') = A' \cap A = A = \varphi_A(A)$.

c. *Montrons le résultat par contraposée :*

Supposons $A \neq E$, *il existe* $b \in E \setminus A$.

Posons $B = \{b\} \in \mathscr{P}(E)$,

Montrons que $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) \neq B$.

Soit $X \in \mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap A \subset A$ *ce qui entraîne que* $b \notin \varphi_A(X)$. *Par conséquent,* $\varphi_A(X) \neq B$.

On aurait pu également utiliser une démonstration directe : puisque φ_A *est surjective, il existe* $X \in \mathscr{P}(E)$ *tel que* $\varphi_A(X) = E$, *c'est-à-dire* $X \cap A = E$. *On en déduit que* $E \subset A$ *et donc que* $A = E$.

THÉORÈME 1.1 ♡♡ **Composée et injections, surjections**

On considère deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. On a les propriétés suivantes :

1. f, g injectives $\implies g \circ f$ injective.
2. f, g surjectives $\implies g \circ f$ surjective.
3. $g \circ f$ injective $\implies f$ injective.
4. $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

Démonstration

1. *Montrons que* $g \circ f$ *est injective.*

Soient $(x, x') \in E^2$ *tels que* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Puisque g *est injective et que* $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, *on en déduit* $f(x) = f(x')$.

Puisque f *est injective, on a* $x = x'$.

2. *Montrons que* $g \circ f$ *est surjective.*

Soit $z \in G$.

Puisque g *est surjective, il existe* $y \in F$ *tel que* $z = g(y)$.

Puisque f *est surjective, il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.

Alors $z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$

3. *Montrons que* f *est injective.*

Soient $(x, x') \in E^2$ *tels que* $f(x) = f(x')$.

En prenant l'image par g *des deux membres, on obtient :* $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, *soit* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Puisque $(g \circ f)$ *est injective, il vient que* $x = x'$.

4. *Montrons que* g *est surjective.*

Soit $z \in G$.

Puisque $(g \circ f)$ *est injective, il existe* $x \in E$ *tel que* $z = (g \circ f)(x)$.

On a donc $z = g\big(f(x)\big)$ *et, en posant* $y = f(x)$, *cela donne* $z = g(y)$ *ce qui montre que* g *est surjective.*

Exercice 1.5 ♡

Soient E, F, G *trois ensembles et deux applications* $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$.

a. *Montrer que si* $g \circ f$ *est injective et* f *surjective, alors* g *est injective.*

b. *Montrer que si* $g \circ f$ *est surjective et* g *injective, alors* f *est surjective.*

Solution :

a. *Montrons que* g *est injective.*

Soit $(y, y') \in F^2$ *vérifiant* $g(y) = g(y')$.

Puisque f *est surjective, il existe* $(x, x') \in E^2$ *tels que* $y = f(x)$ *et* $y' = f(x')$.

On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, c'est-à-dire $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$.

Puisque $(g\circ f)$ est injective, il vient que $x = x'$.

En appliquant f, on a $f(x) = f(x')$, c'est-à-dire $y = y'$.

b. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in \mathrm{F}$.

Puisque $g(y) \in \mathrm{G}$ et que $(g\circ f)$ est surjective, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $g(y) = (g\circ f)(x)$.

On a alors $g(y) = g\big(f(x)\big)$ mais comme g est injective, on a $y = f(x)$.

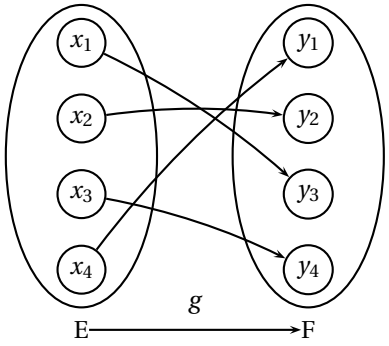
Bijections

DÉFINITION 1.8 ♡♡♡ **Bijection**
On dit qu'une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est *bijective* lorsque f est injective et surjective.

PLAN 1.7 : Pour montrer que f est bijective

1. *Montrons que f est injective.*
2. *Montrons que f est surjective.*

Remarque 1.20 Une application est bijective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède exactement un antécédent.



THÉORÈME 1.2 ♡♡ **Bijection réciproque**
Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Il existe une unique application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ vérifiant

$$\begin{cases} g\circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \\ f\circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \end{cases}.$$

On dit que l'application g est la *bijection réciproque* de la bijection f et on note $g = f^{-1}$.

Démonstration

– *Montrons l'unicité d'une telle application g. Soit $(g_1, g_2) \in \mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E})^2$ vérifiant $f\circ g_1 = f\circ g_2 = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$ et $g_1\circ f = g_2\circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.*

Soit $y \in \mathrm{F}$,

puisque $f\circ g_1(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}(y) = y$, en appliquant g_2, on a $g_2\big(f\circ g_1(y)\big) = g_2(y)$,

d'où $(g_2\circ f)\big(g_1(y)\big) = g_2(y)$,

Or $g_2\circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\big(g_1(y)\big) = g_1(y)$ et finalement $g_1(y) = g_2(y)$.

– *Montrons l'existence d'une telle application g. Considérons $\mathrm{G} = \{(x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F} \mid y = f(x)\}$ le graphe de l'application f. Posons $\widetilde{\mathrm{G}} = \{(y,x) \in \mathrm{F}\times\mathrm{E} \mid y = f(x)\}$. On vérifie que G est un graphe fonctionnel :*

Soit $y \in \mathrm{F}$,

puisque f est bijective, il existe un unique $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire tel que $(y,x) \in \widetilde{\mathrm{G}}$.

Le graphe $\widetilde{\mathrm{G}}$ définit donc une application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$. Montrons que $f\circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.

Soit $y \in \mathrm{F}$, $f\circ g(y) = f\big(g(y)\big)$.

Il existe un unique $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$ et on a alors $g(y) = x$, d'où $f\circ g(y) = f(x) = y$.

On montre de même que $g\circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Exercice 1.6 ♡

On considère trois applications $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \xrightarrow{h} \mathrm{H}$. *Montrer que*

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives } \implies f, g, h \text{ bijectives}$$

Solution : *Puisque $g \circ f$ est surjective, d'après le théorème 1.1 page 1141, g est surjective. De même, puisque $h \circ g$ est injective, g est injective. Par conséquent, g est bijective et on peut introduire sa bijection réciproque $g^{-1} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{F}$. Puisque $g \circ f$ et g^{-1} sont bijectives, toujours d'après le théorème 1.1, $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective. Par conséquent, f est bijective. On démontre avec les mêmes arguments que h est aussi bijective.*
On peut aussi résoudre cet exercice en utilisant les résultats de l'exercice 1.5 page 1141. Puisque $g \circ f$ est injective, f est injective d'après le théorème 1.1 page 1141 et, d'après l'exercice 1.5, f est surjective car g est injective. On prouve de même que h est surjective.

THÉORÈME 1.3 ♡♡♡ **Bijection réciproque d'une composée**
Soient $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux bijections. On note $g^{-1} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ leurs bijections réciproques. La composée $(g \circ f)$ est également bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration *D'après le théorème 1.1 page 1141, la composée de deux bijections est une bijection, donc $g \circ f$ est bijective. Posons $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. On a $h \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et de même, $(g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_\mathrm{G}$. Par le théorème 1.2 page 1142, l'application h est la bijection réciproque de l'application $g \circ f$.*

Image directe, image réciproque

DÉFINITION 1.9 ♡♡♡ **Image réciproque d'une partie**
Soit une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et une partie $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. On définit *l'image réciproque* de la partie B par l'application f :

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) \in \mathrm{B}\}.$$

PLAN 1.8 : Pour montrer que $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$

Soit $x \in \mathrm{E}$.
Vérifions que $f(x) \in \mathrm{B}$.

Remarque 1.21 Ne pas confondre la notation $f^{-1}(\mathrm{B})$ lorsque $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ est une partie de F et la notation $f^{-1}(y)$ lorsque $y \in \mathrm{F}$ qui n'a de sens que lorsque l'application f est bijective.

Exemple 1.19 Soit une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et deux parties $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \subset \mathrm{F}$. Montrer que

a. $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}_2 \implies f^{-1}(\mathrm{B}_1) \subset f^{-1}(\mathrm{B}_2)$
b. $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$
c. $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cup f^{-1}(\mathrm{B}_2)$

a. Raisonnement direct. Supposons (i) : $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}_2$ vraie et montrons (ii) : $f^{-1}(\mathrm{B}_1) \subset f^{-1}(\mathrm{B}_2)$:
   Soit $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_1)$.
   Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in \mathrm{B}_1$ et, puisque $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}_2$, $f(x) \in \mathrm{B}_2$.
   Par définition de l'image réciproque $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_2)$ car $f(x) \in \mathrm{B}_2$.

b. Montrons deux inclusions :
   $\subset$:
      soit $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2)$,
      Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$.
      Puisque $f(x) \in \mathrm{B}_1$, $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_1)$ et, puisque $f(x) \in \mathrm{B}_2$, $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_2)$.
      On a donc $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$.
   $\supset$:
      Soit $x \in f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$.

Puisque $x \in f^{-1}(B_1)$, $f(x) \in B_1$ et, comme $x \in f^{-1}(B_2)$, $f(x) \in B_2$.

Ainsi $f(x) \in B_1 \cap B_2$ et $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

c. $\subset$:

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Étudions deux cas :

Si $f(x) \in B_1$, alors par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}(B_1)$ et à fortiori, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Si $f(x) \in B_2$, alors $x \in f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Dans les deux cas, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

$\supset$:

Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Étudions deux cas :

Si $x \in f^{-1}(B_1)$, alors $f(x) \in B_1$ d'où $f(x) \in B_1 \cup B_2$ et $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Si $x \in f^{-1}(B_2)$, alors $f(x) \in B_2$ d'où $f(x) \in B_1 \cup B_2$ et $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Dans les deux cas, on a montré que $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

DÉFINITION 1.10 ♡♡♡ **Image directe d'une partie**
Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et une partie $A \subset E$. On définit *l'image directe* de la partie A par l'application f :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : \ y = f(x)\}$$

PLAN 1.9 : Pour montrer que $y \in f(A)$

Posons $x = \ldots$

$x \in A$ *et* $y = f(x)$.

Exemple 1.20 Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et $A_1, A_2 \subset E$ deux parties de l'ensemble E. Montrer que :

a. $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$

b. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

c. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ et que l'inclusion réciproque est fausse en général.

a. Supposons $A_1 \subset A_2$ et montrons que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1)$,

d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $A_1 \subset A_2$, $x \in A_2$ d'après la définition de l'image directe,

$y \in f(A_2)$.

b. Montrons deux inclusions :

$\subset$:

Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$,

d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. Étudions deux cas :

Si $x \in A_1$, alors $y = f(x) \in f(A_1)$ et, à fortiori, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Si $x \in A_2$, alors $y = f(x) \in f(A_2)$ et donc $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Dans les deux cas, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\supset$:

soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$,

Étudions deux cas :

Si $y \in f(A_1)$, d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$ et puisque $x \in A_1 \subset A_1 \cup A_2$, $y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

Si $y \in f(A_2)$, on a de même $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

c. Montrons $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$:

Soit $x \in f(A_1 \cap A_2)$,

d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $x \in A_1$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(A_1)$ et, puisque $x \in A_2$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(A_2)$.

Finalement, $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Montrons qu'en général, l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ est fausse. Essayons tout d'abord de la prouver :

Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Puisque $y \in f(A_1)$, il existe $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$.

Puisque $y \in f(A_2)$, il existe $x_2 \in A_2$ tel que $y = f(x_2)$.

On est bloqué, car il nous faut trouver $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. On dispose de $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$, mais comment construire x à partir de x_1 et x_2 ? On se rend compte que si l'on ajoute l'hypothèse que la fonction f est *injective*, alors puisque $f(x_1) = f(x_2)$, on aurait $x_1 = x_2$ et alors $x = x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. Dans le cas où f n'est pas injective, on ne voit pas comment conclure.

Nous allons chercher un contre-exemple en définissant une fonction f et deux parties A_1, A_2 pour lesquelles l'inclusion est fausse. On a vu que pour trouver un contre-exemple, il fallait nécessairement choisir une fonction f qui n'est pas injective. Essayons par exemple avec $E = \{a, b\}$, $F = \{c\}$, et $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(a) = f(b) = c$. En prenant $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$, $f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing) = \varnothing$ alors que $f(A_1) = f(A_2) = \{c\}$ d'où $f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$.

Exercice 1.7 ♡

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, xy) \end{cases}$.

a. *On considère un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big)$ (les notations sont-elles correctes ?)*

b. *Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.*

c. *L'application f est-elle injective ? Surjective ?*

Solution :

a. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on traduit la notation $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big)$ avec la définition de l'image réciproque :*

$$X = (x, y) \in f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y &= a \\ xy &= b \end{cases}$$

Par conséquent, $X \in f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big)$ si et seulement si x et y sont racines du trinôme $P = X^2 - aX + b$.

- *Si $\Delta = a^2 - 4b < 0$, le trinôme P ne possède pas de racines réelles et $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) = \varnothing$.*
- *Si $\Delta = a^2 - 4b = 0$, le trinôme possède une racine double $a/2$, d'où $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) = \{(a/2, a/2)\}$.*
- *Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$, le trinôme possède deux racines réelles distinctes $x_1 \neq x_2$ et $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$.*

b. *On a $(x, y) \in f(\mathbb{R}^2)$ si et seulement s'il existe $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x', y') = (x, y)$. D'après a., c'est le cas si et seulement si $x^2 - 4y \geqslant 0$. Par conséquent,*

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y \geqslant 0\}$$

(représenter graphiquement cet ensemble dans $\mathbb{R}^2$).

c. *Puisque $f(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$, l'application f n'est pas surjective et, puisque $f((1, 2)) = f((2, 1))$, elle n'est pas injective.*

Exercice 1.8 ♡

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$, $B \subset F$ deux parties. Montrer que

a. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

b. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.

Solution :

a. *Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$,*

par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$.

Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B$.

On a donc $y = f(x) \in B$.

b. *Soit $x \in A$,*

Par définition de l'image directe, $f(x) \in f(A)$.

Par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Cherchez des contre-exemples pour montrer qu'en général les inclusions réciproques sont fausses.

Exercice 1.9 ♡

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et deux parties $A \subset E$, $B \subset F$. Montrer que

a. f injective $\implies f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

b. f surjective $\implies f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Solution :

a. *Faisons un raisonnement direct en supposant f injective. Nous allons montrer l'égalité des deux ensembles en prouvant deux inclusions.*
- *$\supset$: est vraie même si f n'est pas injective : Soit $x \in A$, par définition de l'image directe, $f(x) \in f(A)$ et, par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}(f(A))$.*
- *$\subset$:*

  Soit $x \in f^{-1}(f(A))$,

  par définition de l'image réciproque, $f(x) \in f(A)$.

  Par définition de l'image directe, il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.

  Puisque f est injective, $x = x'$

  Et, puisque $x' \in A$, $x = x' \in A$.

b. *Même technique :*
- *$\subset$: Cette inclusion est vraie, même si f n'est pas surjective. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Par définition de l'image réciproque, puisque $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$ et $y = f(x) \in B$.*
- *$\supset$: Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $f(x) \in B$, par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}(B)$ et, puisque $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$, par définition de l'image directe, $y \in f(f^{-1}(B))$.*

A.4.3 Familles

DÉFINITION 1.11 ♡ **Famille**
Soit I un ensemble (les *indices*) et E un ensemble. On appelle *famille* d'éléments de E indexée par l'ensemble I, une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$. On note $(x_i)_{i\in I}$ cette application.

Exemple 1.21 Une *suite* de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indexée par l'ensemble $I = \mathbb{N}$.

DÉFINITION 1.12 ♡ **Famille de parties**
Soit E un ensemble et I un ensemble d'indices. On considère une famille de parties de E, c'est-à-dire une application $I \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ notée $(A_i)_{i\in I}$. On définit :

1. *L'intersection* de la famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ par :
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}.$$
2. *L'union* de la famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ par :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I :\ x \in A_i\}.$$

PLAN 1.10 : Pour montrer que $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$

1. Soit $i \in I$,

2. $\ldots x \in A_i$

PLAN 1.11 : Pour montrer que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

1. Posons $i = \dots$
2. $\dots x \in A_i$.

Remarque 1.22 Ces définitions généralisent les unions ou intersections finies à des unions ou intersections infinies. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = [-k, k]$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{R}$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$.

Exemple 1.22 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Montrer que

a. $E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$

b. $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i)$

a. Montrons deux inclusions :

– $\subset$:

Soit $x \in E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$.

Soit $i \in I$.

Montrons que $x \in E \setminus A_i$. Par l'absurde, si $x \in A_i$, on a $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, ce qui est faux.

– $\supset$:

Soit $x \in \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$.

Montrons que $x \in E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. Par l'absurde, si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, par définition de l'union d'une famille de parties, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_i$, mais alors $x \notin E \setminus A_i$ ce qui est absurde puisque pour tout $i \in I$, $x \in E \setminus A_i$.

b. La démonstration est similaire.

Exercice 1.10 ♡

Soit E *un ensemble et* $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ *une application croissante pour l'inclusion :*

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B \implies f(A) \subset f(B).$$

On note

$$\mathscr{P} = \{X \in \mathscr{P}(E)\,;\, f(X) \subset X\}$$

1. *Montrer que* $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ X \in \mathscr{P} \implies f(X) \in \mathscr{P}$.
2. *Soit* $X_0 = \bigcap_{X\in\mathscr{P}} X$. *Montrer que* $f(X_0) = X_0$.

Solution :

a. Soit $X \in \mathscr{P}$. *Montrons que* $f(X) \in \mathscr{P}$. *Comme* $X \in \mathscr{P}$, $f(X) \subset X$. *Comme* f *est croissante,* $f\big(f(X)\big) \subset f(X)$ *ce qui montre que* $f(X) \in \mathscr{P}$.

b. – *Montrons que* $f(X_0) \subset X_0$.

Soit $X \in \mathscr{P}$.

Comme $X_0 \subset X$ *et que* f *est croissante,* $f(X_0) \subset f(X)$.

Puisque $X \in \mathscr{P}$, $f(X) \subset X$.

On a donc $f(X_0) \subset X$.

Comme $\forall X \in \mathscr{P}$, $f(X_0) \subset X$, *par définition de l'intersection d'une famille,* $f(X_0) \subset \bigcap_{X\in\mathscr{P}} X = X_0$.

– $\supset$ *: On vient de montrer que* $X_0 \in \mathscr{P}$ *et, d'après la première partie, on a donc également* $f(X_0) \in \mathscr{P}$ *d'où* $X_0 = \bigcap_{X\in\mathscr{P}} X \subset f(X_0)$.

A.5 Fautes de raisonnements classiques

Multimédia : Un "forum" où les élèves peuvent proposer des démonstrations fausses et où l'on doit trouver l'erreur

A.5.1 Bien analyser les notations

Une grande partie des erreurs de raisonnement provient d'une mauvaise compréhension des définitions du cours ou des notations de l'énoncé.

Exemple 1.23 Soit deux applications $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$. Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. Comparer $g \circ f\big(f^{-1}(\mathrm{B})\big)$ et $g(\mathrm{B})$.
Voici une démonstration trouvée dans une copie :

$$\begin{aligned} g \circ f(f^{-1}(\mathrm{B})) &= g\big(f(f^{-1}(\mathrm{B}))\big) \quad (\text{ définition de la composée }) \\ &= g\big(\mathrm{B}\big) \quad (\text{ car } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}) \end{aligned}$$

Que pensez-vous de cette « preuve » ? C'est l'exemple typique d'écriture formelle (une suite d'égalités) écrites sans donner un sens à ce que l'on écrit. Il y a plusieurs confusions dues à un manque d'analyse des objets manipulés. Cerise sur le gâteau, le résultat est faux et en raison de son manque de rigueur, l'étudiant ne s'en est pas aperçu !

– L'élève écrit $g \circ f(\mathrm{A}) = g\big(f(\mathrm{A})\big)$. Pour lui, c'est la définition de la composée de deux applications. Il faut toujours avoir en tête le *type d'objet* que l'on manipule. Si $x \in \mathrm{E}$ est un *élément* de l'ensemble E, on a effectivement $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ où $f(x) \in \mathrm{F}$ est un *élément* de l'ensemble F. Mais ici, A n'est pas un élément de E, c'est une *partie* de E : $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. La notation $f(\mathrm{A})$ n'a rien à voir avec l'image d'un élément de E par l'application f, mais représente l'image directe de la partie A par f et il faut utiliser la définition précise de l'image directe. Le résultat est vrai, mais *nécessite une preuve qui s'appuie sur les définitions* :

  Montrons que $g \circ f(\mathrm{A}) \subset g\big(f(\mathrm{A})\big)$.

  Soit $z \in g \circ f(\mathrm{A})$ (z est un élément de l'ensemble G).

  D'après la définition de l'image directe $g(\mathrm{C})$ (où $\mathrm{C} = f(\mathrm{A})$ est une partie de F), il existe $y \in f(\mathrm{A})$ tel que $z = g(y)$.

  D'après la définition de l'image directe $f(\mathrm{A})$, il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que $y = f(x)$.

  On a donc $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ d'après la définition de la composée de deux applications.

  Puisque $z = (g \circ f)(x)$ avec $x \in \mathrm{A}$, d'après la définition de l'image directe, $z \in (g \circ f)(\mathrm{A})$.

  Montrez de la même façon l'inclusion réciproque.

– Il y a une autre incompréhension des notations : $f(f^{-1}(\mathrm{B})) = f \circ f^{-1}(\mathrm{B})$. Pour écrire $f \circ f^{-1}$, il faudrait que l'*application* f^{-1} existe (on parle de *composée d'applications* uniquement) et ce n'est le cas que lorsque f est bijective. La notation $f^{-1}(\mathrm{B})$ désigne ici l'image réciproque d'une partie de B par l'application f.

Écrivons une preuve rigoureuse en analysant les notations et en suivant les plans de démonstration :

– $\subset$:

  Soit $z \in \big(g \circ f\big)\,(f^{-1}(\mathrm{B}))$.

  Par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.

  Puisque $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$, par définition de l'image réciproque, $f(x) \in \mathrm{B}$.

  Puisque $f(x) \in \mathrm{B}$ et $z = g\big(f(x)\big)$, par définition de l'image directe, $z \in g(\mathrm{B})$.

– $\supset$:

  Soit $z \in g(\mathrm{B})$,

  Par définition de l'image directe, il existe $y \in \mathrm{B}$ tel que $z = g(y)$.

  Il nous faut trouver $x \in f^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{E}$ pour écrire $z = (g \circ f)(x)$. On ne voit pas comment à partir de y trouver ce x (ce serait possible si on supposait f *surjective*).

  L'inclusion réciproque semble fausse. Cherchons donc un contre-exemple. On a vu que le problème se posait lorsque f n'était pas surjective. Essayons donc $\mathrm{E} = \{a\}$, $\mathrm{F} = \{b, c\}$, $\mathrm{G} = \{d\}$ et les applications définies par $f(a) = b$, $g(b) = g(c) = d$. Pour $\mathrm{B} = \{c\}$, on a $f^{-1}(\mathrm{B}) = \varnothing$ d'où $(g \circ f)(f^{-1}(\mathrm{B})) = \varnothing$ alors que $g(\mathrm{B}) = \{d\}$.

Remarque 1.23 Avant d'écrire une formule mathématique, vous devez vous demander *quel type d'objet vous manipulez* (est-ce un élément d'un ensemble, une partie, une application ?…). Pour cela, il est utile de faire des schémas au brouillon. Dans l'exemple précédent, on écrit :

$$\underset{f^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{E}}{\mathrm{E}} \xrightarrow{f} \underset{\mathrm{B} \subset \mathrm{F}}{\mathrm{F}} \xrightarrow{g} \underset{g(\mathrm{B}) \subset \mathrm{G},\ (g \circ f)(f^{-1}(\mathrm{B})) \subset \mathrm{G}}{\mathrm{G}}$$

Remarquez également le choix judicieux des notations de notre preuve : nous avons décidé de noter les éléments de E $x, x', \ldots$, ceux de F $y, y' \ldots$ et ceux de G, $z, z', \ldots$. Lors de notre démonstration, nous notons également sur le schéma les éléments utilisés :

$$\underset{x \in \mathrm{E}}{\mathrm{E}} \xrightarrow{f} \underset{y \in \mathrm{F}}{\mathrm{F}} \xrightarrow{g} \underset{z = g(y) \in \mathrm{G}}{\mathrm{G}}$$

Un bon étudiant fait cela intuitivement et comprend ce qu'il doit démontrer. En cas de doute, n'hésitez pas à faire une pause pour revoir la nature de chaque objet manipulé.

A.5.2 Plan de démonstration incorrect

Il faut bien connaître les définitions exactes du cours et les utiliser pour démontrer des résultats en suivant les plans correspondants.

Exemple 1.24 On note $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'ensemble des applications d'un ensemble E vers un ensemble F . On considère deux ensembles E et F. Soit $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application injective. Montrer que l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{E}) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

est injective.
Voici une « démonstration » trouvée dans une copie :

Soit $(x, x') \in \mathrm{E}^2$.

Supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

D'après la définition de la composée, $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.

Puisque g est injective, $f(x) = f(x')$.

Toutes les lignes ci-dessus sont correctes, mais qu'a-t-on montré ? Détaillons la démarche préliminaire à effectuer avant d'écrire une preuve. Il faut d'abord comprendre les notations : si $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E})$,

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{E}.$$

La composée $g \circ f$ est bien définie et c'est une application $g \circ f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$. L'application φ est donc bien définie. On veut montrer que φ est injective. L'ensemble de départ de φ est $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Le plan de démonstration correspondant s'écrit

Soit $(f, f') \in (\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2$.

Supposons que $\varphi(f) = \varphi(f')$.

On prouve que $f = f'$.

On s'aperçoit que l'élève n'a pas suivi ce plan et que ce qu'il écrit n'a aucun sens... Écrivons une preuve correcte. Nous voulons montrer que les deux applications f et f' sont égales. La définition de l'égalité de deux applications impose le plan suivant.

Soit $x \in \mathrm{E}$,

$f(x) = f'(x)$.

Écrivons la preuve complète.

Soient $(f, f') \in (\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2$.

Supposons $\varphi(f) = \varphi(f')$, c'est-à-dire $g \circ f = g \circ f'$.

Soit $x \in \mathrm{E}$.

On a $g \circ f(x) = g \circ f'(x)$.

Puisque $g\big(f(x)\big) = g\big(f'(x)\big)$ et que l'application g est injective, $f(x) = f'(x)$.

Par conséquent, $f = f'$.

A.5.3 Fautes de logique

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques fautes de logique qui illustrent les notions introduites au paragraphe A.1 page 1126.

Exemple 1.25 Un élève affirme dans sa copie que pour deux parties A, B d'un ensemble E, l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & (\mathrm{X} \cap \mathrm{A}, \mathrm{X} \cup \mathrm{B}) \end{array} \right.$$

est injective et il justifie ce résultat par la « démonstration » suivante.

Soit $(\mathrm{X},\mathrm{X}') \in (\mathscr{P}(\mathrm{E}))^2$.

Supposons $f(\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}')$ et montrons que $\mathrm{X} = \mathrm{X}'$.

Montrons que $\mathrm{X} \subset \mathrm{X}'$:

Soit $x \in \mathrm{X}$, étudions deux cas :
– si $x \in \mathrm{A}$, alors $x \in \mathrm{X} \cap \mathrm{A} = \mathrm{X}' \cap \mathrm{A}$ d'où $x \in \mathrm{X}'$,

– si $x \notin B$, alors $x \in X \cup B = X' \cup B$ et donc $x \in X'$.
Dans les deux cas on a montré que $x \in X'$.

On montre que $X' \subset X$ de la même façon.

Le problème vient de l'étude de cas *non-exhaustive* : il peut exister des éléments $x \in E$ tels que $x \notin A$ et $x \in B$. Ce cas n'a pas été traité (et le résultat est faux en général).

Exemple 1.26 Voici un exemple tiré de l'algèbre linéaire qui illustre la même erreur très courante. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $E = F \oplus G$. On suppose que $\forall x \in F$, $u(x) = x$ et $\forall x \in G$, $u(x) = x$. Montrer que $u = \mathrm{id}_E$. On rencontre souvent le « raisonnement » suivant :

Soit $x \in E$, étudions deux cas :
– Si $x \in F$, alors $u(x) = x$.
– Si $x \in G$, alors $u(x) = x$.

Donc $\forall x \in E$, $u(x) = x$ et $u = \mathrm{id}_E$.

C'est une confusion typique entre *supplémentaires* et *complémentaires*. Dire que $E = F \oplus G$ n'est pas la même chose que $E = F \cup G$. Les deux cas étudiés ne sont pas exhaustifs : il peut exister des vecteurs x qui n'appartiennent ni à F ni à G. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}(1,0)$ et $G = \mathrm{Vect}(0,1)$, on a bien $E = F \oplus G$ et pourtant $(1,1) \notin F$ et $(1,1) \notin G$. La démonstration correcte utilise la définition exacte de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires :

Soit $x \in E$.

Puisque $E = F \oplus G$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

Comme u est linéaire, $u(x) = u(x_F) + u(x_G) = x_F + x_G = x$.

Donc $u = \mathrm{id}_E$.

Exemple 1.27 Considérons une suite (u_n). Un élève montre que si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, alors la suite (u_n) converge vers 0. Il écrit :

Considérons deux cas :
– si n est pair, …alors (u_n) converge vers 0.
– si n est impair, …alors (u_n) converge vers 0.

Dans les deux cas, nous avons montré que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Il n'a pas compris que la proposition $P : u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *ne dépend pas de* n. Dire qu'une suite converge vers 0 ne fait pas intervenir n. On peut écrire de façon équivalente $P : u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. La lettre est muette dans un quantificateur $\forall$. La proposition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n| \leqslant \varepsilon$$

est logiquement équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant K \implies |u_k| \leqslant \varepsilon.$$

Il étudie donc deux cas en fonction de n et démontre dans ces deux cas qu'une propriété indépendante de n est vraie. Au mieux il a écrit deux démonstrations correctes identiques. Au pire, il a écrit n'importe quoi …

Exemple 1.28 Pour montrer une proposition de type

$$P : \forall n \in \mathbb{N}\ \mathscr{P}(n)$$

on utilise souvent le principe de récurrence.
– On vérifie la propriété au rang $n = 0$: $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
– On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Pour rédiger une récurrence, vous devez d'abord mettre en évidence la propriété $\mathscr{P}(n)$. Par exemple, pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

on écrit :

$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On utilise ensuite le plan suivant :

$\mathscr{P}(0) : \sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$:

$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ d'après $\mathscr{P}(n)$.

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Une erreur courante consiste à citer la propriété $\mathscr{P}(n)$ avec le quantificateur $\forall$:

$$\mathscr{P}(n) \ : \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarquons que cette propriété *ne dépend pas* de n : elle est logiquement équivalente à la propriété

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Exemple 1.29 On considère une suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x$. On veut montrer que la suite (u_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$. Écrivons une récurrence :

$$\mathscr{P}(n) \ : u_{n+1} \leqslant u_n.$$

$\mathscr{P}(0) : u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$.

$\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1) : u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$.

Ce que nous avons écrit est correct, mais à quel endroit avons-nous utilisé la propriété $\mathscr{P}(n)$ pour montrer $\mathscr{P}(n+1)$? La récurrence est inutile. Il suffit d'écrire :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

Remarque 1.24 Les étudiants ont tendance à abuser de la récurrence. Pour montrer une propriété qui commence par $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$, ils se lancent automatiquement dans une récurrence. On écrit une récurrence uniquement lorsqu'on a essayé une démonstration directe qui n'aboutit pas et qu'on repère un lien intéressant entre $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Si l'on décide d'écrire une récurrence, il est important
– d'écrire *précisément* la propriété $\mathscr{P}(n)$,
– dans la preuve de $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ d'indiquer précisément à quel endroit on a utilisé que $\mathscr{P}(n)$ est supposée vraie.

Exemple 1.30 Réfuter la démonstration suivante : Dans une boîte de crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur.
Par récurrence : Soit n le nombre de crayons. pour $n = 1$ c'est évident. Passons de n à $n+1$: on enlève le premier crayon c_1. Il reste n crayons $c_2, \ldots, c_{n+1}$ qui sont de la même couleur, par "hypothèse" de récurrence. De même $c_1, \ldots, c_n$ sont de la même couleur. Les deux "sous-boîtes" sont donc de la même couleur que $c_i (1 < i < n+1)$. Ainsi tous les crayons ont la même couleur.
Bien entendu, comme le résultat est faux pour $n = 2$, c'est qu'on ne peut pas passer de $n = 1$ à $n = 2$. L'intersection entre les deux "sous-boîtes" est vide.

Exemple 1.31 Soit une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ une partie de E. On demande de comparer $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$ et A. Un étudiant voulait démontrer que l'inclusion $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big) \subset \mathrm{A}$ était fausse. Il écrit :

Soit $x \in f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$, montrons que $x \notin \mathrm{A}$

et il n'aboutit pas. Il essaie de montrer que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, ce qui n'est pas la même chose que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \not\subset \mathrm{A}$. Un autre traduit correctement que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subset \mathrm{A}$ est faux.

Montrons qu'il existe $x \in f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$ tel que $x \notin \mathrm{A}$

et n'aboutit pas non plus. Ces deux élèves voulaient montrer que la propriété est *toujours fausse*, quels que soient l'ensemble E, l'application f et la partie A. Il y a des exemples où la propriété est vraie et d'autres pour lesquels elle est fausse. Il s'agit de montrer que la propriété *n'est pas toujours vraie* et, pour cela, il suffit *d'exhiber un contre-exemple* où l'on construit E, f, A pour lesquels la propriété est fausse. Il faut bien comprendre la distinction entre : « une propriété est toujours fausse » et « il existe des cas où la propriété est fausse ».

A.5.4 Utilisation d'objets non-définis

Il important de relire une démonstration pour s'assurer que tous les objets utilisés ont été bien définis.

Exemple 1.32 Un élève écrit

Soit $y \in f\big(f^{-1}(\mathrm{A})\big)$.

Puisque $x \in f^{-1}(\mathrm{A})\ldots$

Pour lui, la nature de l'objet x est évidente, mais il n'a pas introduit cet objet avant de l'utiliser. La preuve peut être correcte, mais est mal rédigée. Il aurait du écrire

Soit $y \in f(\mathrm{A})$.

Par définition de l'image directe, *il existe* $x \in \mathrm{A}$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 1.33 Un élève veut montrer que si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications surjectives, l'application $(f+g)$ est également surjective. Pour cela, il écrit

Soit $z \in \mathbb{R}$.

Posons $x \in \mathbb{R}$ tel que $z/2 = f(x)$ et $z/2 = g(x)$

Alors $z = z/2 + z/2 = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

Le problème dans cette « preuve » est qu'un tel réel x n'existe pas forcément. Par exemple, si $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, f et g sont surjectives alors que $(f+g)$ est l'application nulle qui n'est pas surjective. Pour $z = 1$, essayez de trouver un réel x tel que $f(x) = 1/2$ et $f(x) = -1/2$ …

Remarque 1.25 Méfiez-vous d'une phrase « Posons x … tel que … ». Bien que l'existence d'un tel objet x vous arrange pour terminer votre preuve, il y a souvent un problème !

A.5.5 Ordre des objets introduits

En analyse, de nombreuses fautes proviennent d'un problème de dépendance d'objets introduits. Plutôt que d'analyser des erreurs, nous allons voir deux exemples importants qui illustrent ce propos.

Exemple 1.34 Voyons un exercice classique d'analyse, le théorème de Césaro. Soit (u_n) une suite, on définit sa moyenne de Césaro comme étant la suite (S_n) où $\mathrm{S}_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \implies \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
Commençons par comprendre intuitivement pourquoi ce résultat est vrai. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, approximons u_n par l en écrivant $u_n = l + r_n$ avec $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors

$$\mathrm{S}_n = \frac{l + \cdots + l}{n} + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n} = l + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{R}_n = \dfrac{r_1 + \cdots + r_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, à partir d'un certain rang N_1, $|r_n|$ est petit : $|r_n| \leqslant \varepsilon$. Majorons en valeur absolue pour $n \geqslant \mathrm{N}_1$

$$|\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{|r_1| + \cdots + |r_n|}{n} \leqslant \frac{|r_1| + \cdots + |r_{\mathrm{N}_1 - 1}|}{n} + \frac{|r_{\mathrm{N}_1}| + \cdots + |r_n|}{n} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n} + \frac{n - \mathrm{N}_1}{n}\varepsilon$$

où $\mathrm{C} = |r_1| + \cdots + |r_{\mathrm{N}_1 - 1}|$ est une constante indépendante de n. Lorsque n est grand, C/n est petit : $\mathrm{C}/n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{N}_2$ et comme $(n - \mathrm{N}_1) \leqslant n$, on a $|\mathrm{R}_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ pour n plus grand que N_1 et que N_2.
Il s'agit maintenant de rédiger une preuve rigoureuse en utilisant la définition d'une suite qui converge vers 0. Pour montrer que $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il nous faut suivre le plan de démonstration suivant.

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\mathrm{N} = \ldots.$

Soit $n \geqslant \mathrm{N}$,

$|\mathrm{R}_n| \leqslant \varepsilon$.

Réfléchissons à *l'ordre* dans lequel nous allons introduire les objets utiles à la démonstration. Au brouillon, nous avons pris $n \geqslant \mathrm{N}_2$ où N_2 est défini tel que $\mathrm{C}/n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{N}_2$, mais la constante $\mathrm{C} = r_1 + \cdots + r_{\mathrm{N}_1 - 1}$ *dépend* de N_1. Il faut donc avoir introduit N_1 *avant* N_2. Pour vérifier notre calcul, il faut prendre $n \geqslant \mathrm{N}_1$ et $n \geqslant \mathrm{N}_2$. L'entier N que nous devons construire doit donc dépendre à la fois de N_1 et de N_2. L'ordre d'introduction des objets est donc le suivant :

On vous donne ε.

Construire N_1 à partir de ε.

Construire N_2 à partir de ε et N_1.

Construire N à partir de N_1 et N_2.

Vérifier que le N construit convient.

Voici la preuve complète :

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $|r_n| \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $C = (|r_1|+\cdots+|r_{N_1-1}|)$. Puisque la suite (C/n) converge vers 0, il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $C/n \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$,

Nous pouvons découper la somme en deux. Majorons en valeur absolue :

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\frac{r_1+\cdots+r_{N_1-1}}{n} + \frac{r_{N_1}+\cdots+r_n}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{|r_1|+\cdots+|r_{N_1-1}|}{n} + \frac{|r_{N_1}|+\cdots+|r_n|}{n} \\
&\leqslant \frac{C}{n} + \frac{(n-N_1)\varepsilon}{2n} \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si on avait écrit :

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $C = |r_1|+\cdots+|r_{N_1}-1|$.

Puisque $C/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $C/n \leqslant \varepsilon/2$.

Puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \varepsilon/2$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$ ...

nous aurions fait une erreur de dépendance. L'objet C dépend de N_1 qui n'a pas encore été introduit dans la démonstration.

Exemple 1.35 Dans le cours d'analyse, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si par définition :

$$\exists \alpha > 0 :\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que la fonction f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point $x \in I$ ce qui se traduit avec les quantificateurs par

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ \forall y \in I,\ |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

En voyant la définition d'une fonction uniformément continue, vous devez vous demander quelle est la différence avec celle d'une fonction continue. Ayant écrit les deux définitions avec des quantificateurs, on s'aperçoit qu'elles se ressemblent beaucoup, l'unique différence concerne l'ordre de deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Pour comprendre l'impact de cette différence, étudions les plans de démonstration correspondant aux deux définitions.

1. Pour montrer que f est continue sur I :

   Soit $x \in I$, soit $\varepsilon > 0$.

   Posons $\alpha =$.

   Soit $y \in I$ tel que $|x-y| \leqslant \alpha$,

   $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

En pratique :
– On vous donne un x et un ε que vous ne pouvez pas choisir.
– À partir de x et ε, vous devez construire un réel α *qui dépend à la fois* de x et ε et qui vérifie la propriété.

Pour montrer que f est *uniformément* continue, le plan s'écrit

Soit $\varepsilon > 0$

Posons $\alpha =$

Soit $x \in I$, soit $y \in I$, tels que $|x-y| \leqslant \alpha$

$|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

En pratique :
– On vous donne un $\varepsilon > 0$ que vous ne pouvez pas choisir.
– À partir de cet ε, vous devez construire un α_ε *qui ne dépend que de* ε vérifiant la propriété.

On comprend alors la différence entre ces deux définitions : c'est un problème de *dépendance* dans la construction de α. Dans le premier cas, vous pouvez construire α qui dépend de ε *et* x alors que dans le deuxième cas, vous devez construire un α qui ne dépend que de ε et qui convient pour tout $x \in I$, ce qui est plus difficile.
Pour comprendre réellement une telle définition, vous devez prendre l'habitude de chercher par vous même des exemples et contre-exemples. C'est le meilleur moyen de bien assimiler un cours de mathématiques. Voyons un exemple de réflexion sur le cours. Un théorème affirme que f uniformément continue sur $I \implies f$ continue sur I. Un autre théorème (Heine) affirme que si I est un *segment*, f continue sur $I \iff f$ uniformément continue sur I. Pour trouver un contre-exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue, il est donc nécessaire de choisir un intervalle I qui n'est pas un segment. Écrivons la négation de l'uniforme continuité de f :

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \alpha > 0, \ \exists x \in I : \ \exists y \in I : \ |x-y| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon.$$

Prenons $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = x^2$. Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$. Montrons qu'elle n'est pas uniformément continue sur I. Formons pour $0 \leqslant x < y$, $|f(x)-f(y)| = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$. On voit que si $|x-y| \leqslant \alpha$ avec le cas limite $y = x+\alpha$, $|f(x)-f(y)| = \alpha(y+x)$ donc la quantité $|f(x)-f(y)|$ devient arbitrairement grande en choisissant x et y grands. Montrons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue.

Posons $\varepsilon = 1$.

Soit $\alpha > 0$,

posons $x = 1/\alpha$ et $y = 1/\alpha + \alpha$

on a $|x-y| = \alpha$ et $|f(x)-f(y)| = 2\alpha x + \alpha^2 \geqslant 2 + \alpha^2 \geqslant 1$.

Exercice 1.11 ♡♡

Quelles sont les liens entre les notions suivantes : « f est uniformément continue sur I » *et « f est lipschitzienne sur* I » *?*

Solution : *On a les implications :*

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue}$$

et aucune des implications réciproques n'est vraie en général. Montrons que f lipschitzienne entraîne f uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$

Puisque f est lipschitzienne, il existe $k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Posons $\alpha = \varepsilon / k$.

Soit $(x,y) \in I^2$ *tel que* $|x-y| \leqslant \alpha$,

$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant k\alpha \leqslant \varepsilon$.

Montrons que l'implication réciproque est fausse en général. Dire que f est lipschitzienne revient à dire qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$: les pentes de toutes les cordes sont bornées. Considérons la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Elle est continue sur le segment $[0,1]$, *donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Vérifions qu'elle n'est pas lipschitzienne. Par l'absurde, s'il existe $k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(f(2/n) - f(1/n)) \leqslant 1/n$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} \leqslant 1$ ce qui est faux.*

Annexe B

Techniques d' algèbre

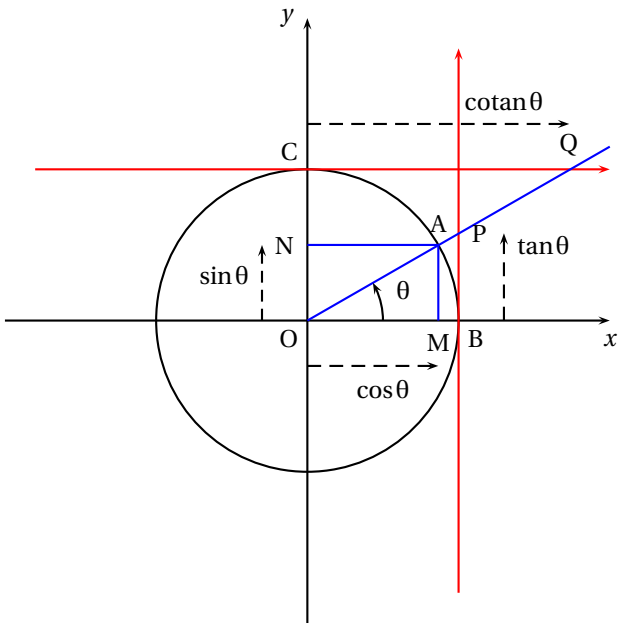
sans techniqu',un don n'est rien qu'un' sal' manie.
Georges Brassens (1921-1981)

B.1 Trigonométrie

Dans ce paragraphe, nous allons voir les formules de trigonométrie à connaître par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Il est aussi important de comprendre à quoi servent ces formules.

B.1.1 Lecture du cercle trigonométrique

Il faut savoir interpréter pour un angle θ, son sinus, son cosinus, sa tangente et sa cotangente géométriquement sur le cercle trigonométrique :



Multimédia : animation avec l'angle qui varie

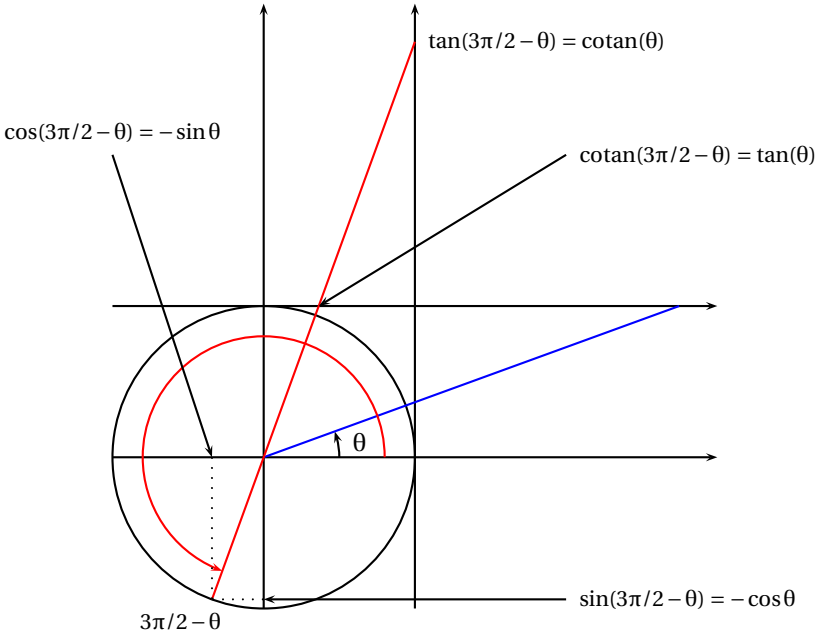
On représente une demi-droite issue de l'origine faisant un angle θ avec l'axe (Ox), cette demi-droite coupe le cercle unité en un point A, coupe la tangente au cercle au point $B = (1,0)$ en un point P et la tangente au cercle au point $C = (0,1)$ en un point Q. On interprète $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\text{cotan}\,\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ comme des mesures algébriques :

- En notant M la projection orthogonale du point A sur l'axe (Ox), $\sin\theta = \overline{OM}$.
- En notant N la projection orthogonale du point A sur l'axe (Oy), $\cos\theta = \overline{ON}$.
- $\tan\theta = \overline{BP}$.
- $\text{cotan}\,\theta = \overline{CQ}$.

On a $\cos(\pi/2-\theta) = \sin(\theta)$, $\sin(\pi/2-\theta) = \cos(\theta)$, $\tan(\pi/2-\theta) = \text{cotan}(\theta)$ et $\text{cotan}(\pi/2-\theta) = \tan(\theta)$. Pour retrouver d'autres simplifications, remarquons que si l'on choisit sur le dessin un angle θ petit et positif, $\sin\theta$ est petit positif, $\cos\theta$ est proche de 1 positif, $\tan\theta$ est petit positif et $\text{cotan}\,\theta$ est grand et positif.

On retrouve sans calculs les simplifications de $\sin(k\pi\pm\theta)$, $\sin(k\pi+\pi/2\pm\theta)$, $\cos(k\pi\pm\theta)$, $\cos(k\pi+\pi/2\pm\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ ou $\cos\theta$ et les simplifications de $\tan(k\pi\pm\theta)$, $\tan(k\pi+\pi/2\pm\theta)$, $\operatorname{cotan}(k\pi\pm\theta)$, $\operatorname{cotan}(k\pi+\pi/2\pm\theta)$ en fonction de $\tan\theta$ ou $\operatorname{cotan}\theta$.

Exemple 2.1 Simplifier $\sin(3\pi/2-\theta)$, $\cos(3\pi/2-\theta)$, $\tan(3\pi/2-\theta)$ et $\operatorname{cotan}(3\pi/2-\theta)$. On prend sur le dessin un angle θ petit positif et on représente l'angle $3\pi/2-\theta$:



On voit que $\cos(3\pi/2-\theta)$ est petit et négatif et on retrouve sans calculs que $\cos(3\pi/2-\theta)=-\sin\theta$. De même, $\sin(3\pi/2-\theta)$ étant proche de -1, il vaut $-\cos\theta$. Puisque $\tan(3\pi/2-\theta)$ est grand et positif, il vaut $\operatorname{cotan}\theta$ et de même $\operatorname{cotan}(3\pi/2-\theta)=\tan\theta$.

Exemple 2.2 Simplifier en utilisant le cercle trigonométrique, $\sin(7\pi/2+\theta)$, $\cos(5\pi/2+\theta)$, $\tan(\pi/2+\theta)$, $\operatorname{cotan}(7\pi/2+\theta)$. $\sin(7\pi/2+\theta)=-\cos\theta$, $\cos(5\pi/2+\theta)=-\sin\theta$, $\tan(\pi/2+\theta)=-\operatorname{cotan}\theta$, $\operatorname{cotan}(7\pi/2+\theta)=-\tan\theta$.

On remarque que $\cos(\theta+k\pi)=\pm\cos(\theta)$, $\sin(\theta+k\pi)=\pm\sin(\theta)$ en fonction de la parité de l'entier k. On vérifie la formule utile :

♡ **2.1** $$\sin(\theta+k\pi)=(-1)^k\sin\theta \qquad \cos(\theta+k\pi)=(-1)^k\cos(\theta).$$

B.1.2 Les quatre formules fondamentales de la trigonométrie

Il n'y a que peu de formules à retenir vraiment par cœur en trigonométrie. Comme les méthodes que nous allons voir sont similaires en trigonométrie hyperbolique, nous les inscrivons en parallèle.
On sait exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\sin^2 x$ grâce à la formule fondamentale :

♡ **2.2** $$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \qquad\qquad \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

Lorsqu'on rencontre un groupement $\sqrt{1-y^2}$ (avec $|y|\leqslant 1$), il est souvent intéressant de poser $y=\sin x$ ou $y=\cos x$ pour éliminer la racine : $\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$. De même pour un groupement $\sqrt{1+y^2}$, il est intéressant de poser $y=\operatorname{sh} x$ puisque $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{ch} x$ et pour un groupement $\sqrt{y^2-1}$ de poser $y=\pm\operatorname{ch} x$ puisque $\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-1}=\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}=|\operatorname{sh} x|$.
Il faut connaître par cœur les quatre formules d'addition :

♡ **2.3**
$$\begin{aligned}
\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b & \operatorname{ch}(a+b)&=\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b+\operatorname{sh} a\operatorname{sh} b\\
\cos(a-b)&=\cos a\cos b+\sin a\sin b & \operatorname{ch}(a-b)&=\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b-\operatorname{sh} a\operatorname{sh} b\\
\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b & \operatorname{sh}(a+b)&=\operatorname{sh} a\operatorname{ch} b+\operatorname{ch} a\operatorname{sh} b\\
\sin(a-b)&=\sin a\cos b-\cos a\sin b & \operatorname{sh}(a-b)&=\operatorname{sh} a\operatorname{ch} b-\operatorname{ch} a\operatorname{sh} b.
\end{aligned}$$

Elles permettent, en prenant $b=a$, de trouver les deux formules importantes :

♡ **2.4**

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad \operatorname{sh} 2a = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a.$$

Ces formules servent en particulier à *linéariser* $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$:

♡ **2.5**

$$\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2} \qquad \operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}.$$

Remarque 2.1 Ces formules de linéarisation sont surtout utilisées en trigonométrie classique. Pour la trigonométrie hyperbolique, les signes changent. On peut vérifier facilement une formule hyperbolique en prenant $a = 0$ et en faisant $a \to +\infty$. Par exemple, la formule suivante est fausse :

$$\operatorname{ch}(2a) = 1 - 2\operatorname{sh}^2 a$$

($a \to +\infty$ ne va pas !)

Remarque 2.2 Ces formules servent également à exprimer $1 + \cos a$ ou $1 - \cos a$ comme un carré :

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Lorsqu'on rencontre un groupement $\sqrt{1+\cos\theta}$ ou $\sqrt{1-\cos\theta}$, il faut donc penser à l'angle moitié :

$$\sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|, \quad \sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

B.1.3 Comment retrouver les autres

Pour *linéariser* un produit de cosinus et de sinus, il suffit d'additionner ou de retrancher deux lignes des quatre formules fondamentales. Par exemple, si l'on veut retrouver la linéarisation de $\cos a \cos b$, on part des deux premières lignes :

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

et on fait $L_2 + L_1$ pour obtenir $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$. On retrouve ainsi rapidement les trois formules suivantes :

♡ **2.6**

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big] \quad \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\big]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big] \quad \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\big]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big] \quad \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\big].$$

On sait également transformer une somme de cosinus ou une somme de sinus en un produit. Par exemple, pour exprimer $\cos p + \cos q$, on part des deux premières lignes

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

et, en les sommant,

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

Il suffit de choisir a et b pour que $\begin{cases} a+b &= p \\ a-b &= q \end{cases}$ i. e. $\begin{cases} a &= \dfrac{p+q}{2} \\ b &= \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$. On obtient de cette façon les deux formules suivantes :

♡ **2.7**

$$\cos p + \cos q = 2\cos\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\cos\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \quad \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{p-q}{2}\Big)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\cos\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \quad \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{p-q}{2}\Big).$$

Remarque 2.3 On ne sait pas transformer $\cos p + \sin q$ en un produit simple, sauf si $p = q$:

$$\cos p + \sin p = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4)\cos(p) + \sin(\pi/4)\sin(p)\big) = \sqrt{2}\cos(p - \pi/4)$$

Plus généralement,

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\mathrm{A}}\cos\theta + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\mathrm{B}}\sin\theta\Big).$$

Mais puisque $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 1$, il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{A} = \cos\varphi$ et $\mathrm{B} = \sin\varphi$ d'où finalement

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\big(\cos\theta\cos\varphi + \sin\varphi\sin\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \varphi).$$

On retient le lien simple qui existe entre $\tan x$ et $\cos x$:

♡ **2.8**

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Pour les tangentes, on a les formules suivantes qui proviennent de la définition et des formules fondamentales.

♡ **2.9**

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} & 1 - \mathrm{th}^2 x &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} & \mathrm{th}(a-b) &= \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}\\
\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} & \mathrm{th}(2a) &= \frac{2\,\mathrm{th}\, a}{1 + \mathrm{th}^2 a}.
\end{aligned}$$

Terminons par des formules qui permettent d'exprimer les fonctions trigonométriques comme fractions rationnelles en $t = \tan(x/2)$. Ces formules nous serviront pour calculer des primitives.

♡ **2.10**

$$\begin{aligned}
t &= \tan\Big(\frac{x}{2}\Big) & t &= \mathrm{th}\Big(\frac{x}{2}\Big)\\
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} & \mathrm{sh}\, x &= \frac{2t}{1-t^2}\\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} & \mathrm{ch}\, x &= \frac{1+t^2}{1-t^2}\\
\tan x &= \frac{2t}{1-t^2} & \mathrm{th}\, x &= \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Démonstration *Utilisons la formule* $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ *et la relation entre* cos *et* tan *:* $\cos^2(x/2) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x/2)}$ *pour écrire :*

$$\sin(x) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

De même,

$$\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Il suffit de former le quotient pour trouver $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

B.2 Calculs de sommes

B.2.1 Comprendre les notations

On considère un ensemble I *fini* (indices) et une famille de réels $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$. On note la *somme* de cette famille : $\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$ et le *produit* de cette famille : $\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i$.

Par exemple, si $\mathrm{I} = [\![1, n]\!]$, $\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$. Lorsque l'ensemble d'indices est un

intervalle d'entiers : $\mathrm{I} = [\![p, q]\!]$, on note

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

Il est important de comprendre que la lettre i utilisée dans la notation $\sum_{i\in \mathrm{I}}$ est *muette* (elle prend les différentes valeurs dans I) et on peut la remplacer par une autre lettre :

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j = a_p + \cdots + a_q.$$

On sait calculer certaines sommes fondamentales, comme la somme des n premiers entiers (ainsi que la somme de leurs carrés et de leurs cubes) :

♡ **2.11**
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

♡ **2.12**
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

♡ **2.13**
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Pour la somme S des n premiers entiers, une démonstration simple consiste à écrire les termes en ordre inverse :

$$\begin{cases} \mathrm{S} &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ \mathrm{S} &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{cases}$$

et, en remarquant que $1 + n = 2 + (n-1) = \cdots = n + 1$ puis en additionnant ces deux lignes, on obtient $2\mathrm{S} = n(n+1)$ d'où le résultat. On montre les deux autres formules par récurrence sur n.
La formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

s'écrit avec nos notations :

♡ **2.14**
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Les *sommes géométriques* sont très importantes. Si $x \neq 1$,

$$\mathrm{S} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En effet,

$$\begin{cases} \mathrm{S} &= 1 + x + \cdots + x^n \\ x\mathrm{S} &= x + \cdots + x^n + x^{n+1} \end{cases}$$

et, en soustrayant, on obtient $(1-x)\mathrm{S} = 1 - x^{n+1}$ d'où le résultat. Lorsque $x = 1$, on somme 1 $(n+1)$ fois : $\mathrm{S} = (n+1)$. Cette formule s'écrit avec nos notations :

♡ **2.15**
$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

B.2.2 Changement d'indices, télescopage

Considérons deux entiers $n < p$ et une somme

$$\mathrm{S} = \sum_{k=n}^{p} a_k = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_p.$$

On peut également écrire

$$S = \sum_{i=0}^{p-n} a_{n+i} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+(p-n)}.$$

Formellement, on effectue un *changement d'indice de sommation* en posant $i = k - n$ et en modifiant les bornes de l'intervalle de sommation : lorsque $k = n$, $i = 0$ et, lorsque $k = p$, $i = p - n$. Dans le terme générique à sommer a_k, on remplace toutes les occurrences de k par $(n + i)$.
On peut également effectuer le changement d'indices $j = p - k$: lorsque k parcourt l'intervalle $[\![n, p]\!]$, j parcourt l'intervalle $[\![0, p - n]\!]$. En remplaçant k par $p - j$, on obtient alors :

$$S = \sum_{j=0}^{p-n} a_{p-j} = a_p + a_{p-1} + \cdots + \underbrace{a_{p-(p-n)}}_{a_n}.$$

Ce changement d'indice consiste à sommer les termes de la famille dans l'ordre inverse. La formule du binôme peut s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Il suffit d'échanger les rôles de a et b ou d'effectuer le changement d'indice $j = n - k$.
Si dans les termes à sommer, on a en facteur un terme *qui ne dépend pas de l'indice de sommation*, on peut le factoriser dans la somme :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha \times a_i = (\alpha a_1) + (\alpha a_2) + \cdots + (\alpha a_n) = \alpha(a_1 + \cdots + a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Par exemple, pour calculer une somme géométrique avec l'indice qui ne commence pas à 0, on peut utiliser deux techniques :

$$S = \sum_{i=p}^{q} x^i = \sum_{i=0}^{q} x^i - \sum_{i=0}^{p-1} x^i = \frac{1 - x^{q+1}}{1 - x} - \frac{1 - x^p}{1 - x} = \frac{x^p - x^{q+1}}{1 - x}$$

ou, en posant $j = i - p$,

$$S = \sum_{i=p}^{q} x^i = \sum_{j=0}^{q-p} x^{j+p} = \sum_{j=0}^{q-p} x^p x^j = x^p \sum_{j=0}^{q-p} x^p = x^p \frac{1 - x^{q-p+1}}{1 - x}.$$

En pratique, il vaut mieux utiliser la deuxième méthode car elle donne un résultat factorisé dans des calculs de sommes plus compliqués.

Exemple 2.3 Pour calculer la somme $S = \sum_{i=0}^{n} (n - i)^2$, on peut développer :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n} n^2 - \sum_{i=0}^{n} 2ni + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\ &= (n+1)n^2 - 2n \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\ &= (n+1)n^2 - 2n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais il vaut bien mieux effectuer le changement d'indices $k = n - i$:

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Voyons maintenant une technique courante dans les calculs de sommes, le télescopage. Considérons :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right).$$

Si l'on écrit les termes successifs de cette somme,

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right),$$

on s'aperçoit que tous les termes se simplifient sauf $1/1$ et $1/(n+1)$: $\mathrm{S} = \dfrac{1}{n+1} - 1$. Utilisons les changements d'indices pour rédiger ce calcul :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (i = k+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (\text{ les indices sont muets }) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} - \Big(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{1}\Big) \text{ (on sort des sommes les termes qui ne sont pas communs)} \\
&= \frac{1}{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4 Calculer la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Commençons par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}.$$

pour écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\Big) - \Big(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On utilise souvent des changements d'indice pour calculer des sommes où tous les indices sont pairs ou impairs. Par exemple, on veut calculer la somme des premiers entiers pairs inférieurs à un entier n :

$$\mathrm{S}_n = 0 + 2 + 4 + \cdots = \sum_{\substack{i=0 \\ i\,pair}}^{n} i.$$

Puisque les indices i de cette somme sont pairs, on peut les écrire sous la forme $i = 2k$ où k est un entier. Comme $0 \leqslant i = 2k \leqslant n$, il vient $0 \leqslant k \leqslant n/2$ et le nouvel indice k varie donc dans l'intervalle entier $[\![0, \mathrm{E}(n/2)]\!]$. Si $n = 2p$, $k \in [\![0, p]\!]$ et si $n = 2p+1$, $k \in [\![0, p]\!]$. Par conséquent,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{p} (2k) = 2\sum_{k=0}^{p} k = 2\frac{p(p+1)}{2} = p(p+1).$$

Nous voulons calculer maintenant la somme des coefficients binomiaux

$$\mathrm{S}_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \sum_{\substack{i=0 \\ i\,pair}}^{n} \binom{n}{i}.$$

L'idée consiste à utiliser la formule du binôme donnant la somme de tous les coefficients binomiaux :

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

On introduit la somme des coefficients binomiaux où les indices sont impairs :

$$\mathrm{T}_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i\ impair}}^{n} \binom{n}{i}.$$

Nous avons alors $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = 2^n$. Il nous faut une autre relation pour calculer S_n et T_n. Formons la différence :

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n = 2^{n-1}$. Nous avons calculé les deux sommes en développant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$. On remarque que 1 et -1 sont les racines carrées de l'unité.
On peut généraliser cette idée en utilisant les racines n-ièmes de l'unité. Par exemple, si nous voulons calculer les sommes

$$\begin{cases} \mathrm{U}_n &= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}, \\ \mathrm{V}_n &= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}, \\ \mathrm{W}_n &= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}, \end{cases}$$

on calcule à l'aide du binôme les trois sommes

$$\begin{cases} (1+1)^n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n + \mathrm{W}_n, \\ (1+j)^n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = \mathrm{U}_n + j\mathrm{V}_n + j^2\mathrm{W}_n, \\ (1+j^2)^n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = \mathrm{U}_n + j^2\mathrm{V}_n + j\mathrm{W}_n. \end{cases}$$

Nous avons utilisé les relations $j^k = 1$ lorsque $k \equiv 0\ [3]$, $j^k = j$ lorsque $k \equiv 1\ [3]$ et $j^k = j^2$ lorsque $j \equiv 2\ [3]$. En utilisant la propriété $1 + j + j^2 = 0$, il suffit d'additionner les trois lignes précédentes pour trouver

$$\mathrm{U}_n = \frac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}.$$

On peut également avec la combinaison linéaire $\mathrm{L}_1 + j^2\mathrm{L}_2 + j\mathrm{L}_3$ calculer V_n et de même avec $\mathrm{L}_1 + j\mathrm{L}_2 + j^2\mathrm{L}_3$ calculer W_n. Cette technique permet de calculer plus généralement des sommes de la forme

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv l\ [p]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Il suffit de développer $(1+\omega_k)^n$ pour les n racines n-ièmes de l'unité ω_k.

B.2.3 Sommes doubles

Lorsque l'ensemble d'indices est une partie finie formée de couples, on dit qu'on a une *somme double*. Par exemple, si $\mathrm{I} = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2)\}$ et $a_{(i,j)} = i + j$,

$$\mathrm{S} = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = a_{(1,2)} + a_{(3,1)} + a_{(2,1)} + a_{(1,1)} = (1+2) + (1+3) + (2+2) + (3+2) = 16.$$

Un cas courant est lorsque I est un produit d'intervalles d'entiers :

$$\mathrm{I} = [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!] = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,q),(2,1)\ldots,(2,q),\ldots,(p,q)\}$$

En notant $a_{ij} = a_{(i,j)}$, on a la formule *d'interversion de sommes* :

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right)}_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{q} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\right)}_{\beta_j}.$$

Remarquons que $\alpha_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}$ ne dépend pas de j (l'indice de sommation est muet), mais de i. De même, β_j ne dépend pas de i. La formule précédente permet donc d'exprimer une somme double à l'aide de sommes simples.
Pour comprendre cette formule, considérons l'exemple suivant : $I = \{1,2\}$ et $J = \{1,2,3\}$:

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\Big) = \underbrace{(a_{11}+a_{12}+a_{13})}_{i=1} + \underbrace{(a_{21}+a_{22}+a_{23})}_{i=2},$$

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\Big) = \underbrace{(a_{11}+a_{21})}_{j=1} + \underbrace{(a_{12}+a_{22})}_{j=2} + \underbrace{(a_{13}+a_{23})}_{j=3}.$$

Ces deux sommes sont bien égales puisque le résultat d'une sommation ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les sommes (en algèbre, on dit que la loi + est commutative).
Lorsque $a_{ij} = \alpha_i \times \beta_j$, la somme double s'écrit comme un produit de deux sommes simples :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \alpha_i\beta_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{q}\beta_j\Big)}_{\gamma} \quad (\alpha_i \text{ ne dépend pas de } j) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{q}\beta_j\Big) \times \Big(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\Big) \quad (\gamma \text{ ne dépend pas de } i). \end{aligned}$$

Exemple 2.5 Calculons la somme $S = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} i\binom{n}{j}(\sqrt{2})^j$:

$$\begin{aligned} S &= \Big(\sum_{i=0}^{p} i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sqrt{2}^j\Big) \\ &= \frac{p(p+1)}{2}(1+\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

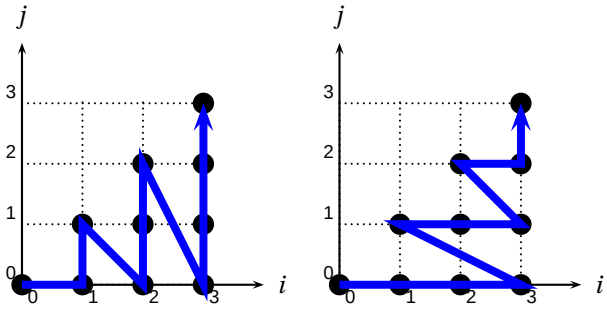
Exemple 2.6 Calculons la somme $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2$. En développant cette somme,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) + n\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2 \quad (\text{ indices muets }) \\ &= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}. \end{aligned}$$

Un exemple plus compliqué d'interversion de signes sommes, lorsque les bornes ne sont pas indépendantes :

$$S = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=j}^{n} a_{ij}\Big).$$

Ici, $S = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij}$ où $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$. On peut représenter chaque couple $(i,j) \in I$ par un point sur un quadrillage ($n = 3$ sur la figure) :



Si on commence par sommer sur l'indice i variant de 0 à n, à i fixé, j varie entre 0 et i. Sur le dessin, cela correspond à sommer verticales par verticales :

$$\mathrm{S} = \underbrace{(a_{00})}_{i=0} + \underbrace{(a_{10}+a_{11})}_{i=1} + \underbrace{(a_{20}+a_{21}+a_{22})}_{i=2} + \underbrace{(a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{33})}_{i=3}.$$

Mais on peut également sommer horizontale par horizontale :

$$\mathrm{S} = \underbrace{(a_{00}+a_{10}+a_{20}+a_{30})}_{j=0} + \underbrace{(a_{11}+a_{21}+a_{31})}_{j=1} + \underbrace{(a_{22}+a_{32})}_{j=2} + \underbrace{(a_{33})}_{j=3}.$$

Exemple 2.7 Calculer la somme $\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$. En inversant les signes sommes :

$$\mathrm{S} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j = (1+2)^n = 3^n$$

B.3 Trigonométrie et nombres complexes

Nous allons voir dans ce paragraphe des techniques de calcul trigonométrique utilisant la notation $\sum$ et les exponentielles imaginaires.

B.3.1 Transformation de $\cos(n\theta)$

Il s'agit de transformer une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ en produits de la forme $\cos^p a \sin^q a$. Ce procédé s'avérera utile pour résoudre des équations trigonométriques. La formule de Moivre est à la base du procédé de factorisation. Commençons par un exemple. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on veut transformer en produits $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$. On a, par application de la formule de Moivre :

$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^5 = e^{5i\theta} = \cos 5\theta + i\sin 5\theta.$$

Développons le membre de gauche de cette égalité avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta \\ &= \big(\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\big) + i\big(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\big).\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta.\end{aligned}$$

Calculons maintenant une formule générale qui permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. Écrivons avec la formule de Moivre

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\big(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\big) = \frac{1}{2}\Big[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\Big]$$

et développons à l'aide de la formule du binôme :

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big[1+(-1)^k\big]i^k\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta.$$

Puisque $[1+(-1)^k] = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$, $\cos(n\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k pair}}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta$. Tous les indices de cette somme étant pairs, on peut les écrire $k = 2p$ avec $0 \leqslant 2p \leqslant n$, c'est-à-dire $p \in [\![0, \mathrm{E}(n/2)]\!]$. Par conséquent,

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}\theta \sin^{2p}\theta = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta (1-\cos^2\theta)^p = \mathrm{T}_n(\cos\theta)$$

où T_n est un polynôme appelé *n*-ième *polynôme de Tchebychev* (de première espèce) :

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} (-1)^p \mathrm{X}^{n-2p} (1-\mathrm{X}^2)^p.$$

Le calcul précédent est fondamental. Les polynômes de Tchebychev jouent un rôle important en algèbre et en analyse et il est courant de trouver cette question de cours dans les premières questions d'un problème de concours. Vous devez avoir bien compris et savoir refaire rapidement ce calcul.
Effectuons le calcul similaire pour $\sin(n\theta)$:

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right],$$

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[1-(-1)^k\right] i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta = \frac{1}{i} \sum_{\substack{k=0 \\ k impair}}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta.$$

Tous les indices de cette somme étant impairs, on peut les écrire sous la forme $k = 2p+1$ où $0 \leqslant 2p+1 \leqslant n$, c'est-à-dire $-1/2 \leqslant p \leqslant (n-1)/2$ et p varie donc dans l'intervalle d'entiers $[\![0, \mathrm{E}(\frac{n-2}{2})]\!]$.

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{i} \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} \cos^{n-2p-1}\theta \sin^{2p+1}\theta = \sin\theta \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}\theta (1-\cos^2\theta)^p = \sin\theta \mathrm{U}_n(\cos\theta)$$

où $\mathrm{U}_n(\mathrm{X}) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \mathrm{X}^{n-2p-1} (1-\mathrm{X}^2)^p$ est un polynôme.
Pour terminer, voyons un complément important sur les polynômes de Tchebychev. Utilisons la formule de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour écrire $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant 2$,

$$\cos\left[(n+1)\theta\right] + \cos\left[(n-1)\theta\right] = 2\cos\theta\cos(n\theta).$$

Puisque tout réel $x \in [-1,1]$ peut s'écrire $\cos(\theta)$, il vient

$$\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{T}_{n+1}(x) + \mathrm{T}_{n-1}(x) = 2x\mathrm{T}_n(x)$$

et on utilise une technique importante sur les polynômes : le polynôme $\mathrm{Q} = \mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} - 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n$ admet une infinité de racines, il est donc nul. On obtient ainsi une relation de récurrence qui permet de calculer de proche en proche les T_n :

$$\mathrm{T}_0 = 1, \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1}.$$

On obtient $\mathrm{T}_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2 - 1$, $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$ et on retrouve les formules de trigonométrie $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

et ainsi de suite. On se sert souvent de cette formule de récurrence pour introduire plus simplement les polynômes de Tchebychev. Elle permet en particulier de montrer simplement par récurrence que le terme dominant du polynôme T_n vaut $2^{n-1}\mathrm{X}^n$.

B.3.2 Problèmes de linéarisation

L'objectif de ce paragraphe est de montrer comment transformer un produit $\cos^p\theta \sin^q\theta$ en une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$. Cette opération s'avérera très utile pour les problèmes de calcul de primitive. Les formules d'Euler sont

également à la base du processus de linéarisation. Commençons par un exemple. Nous souhaitons linéariser $\sin^6\theta$. On a :

$$\begin{aligned}
\sin^6\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}-6e^{i5\theta}e^{-i\theta}+15e^{i4\theta}e^{-i2\theta}-20e^{i3\theta}e^{-i3\theta}+15e^{i2\theta}e^{-i4\theta}-6e^{i\theta}e^{-i5\theta}+e^{-i6\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}-6e^{i4\theta}+15e^{i2\theta}-20+15e^{-i2\theta}-6e^{-i4\theta}+e^{-i6\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}+e^{-i6\theta}-6\left(e^{i4\theta}+6e^{-i4\theta}\right)+15\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)-20\right) \\
&= -\frac{1}{32}\left(\cos 6\theta-6\cos 4\theta+15\cos 2\theta-10\right).
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule du binôme et avons regroupé les termes symétriques pour retrouver des cosinus. Maple permet d'effectuer ces linéarisations trigonométriques à l'aide de la fonction `combine` :

MAPLE

```
> A:=(cos(t))^4;
                                  4
                        A := cos(t)
> combine(A);
                 1            1            3
                 - cos(4 t) + - cos(2 t) + -
                 8            2            8
```

Il est alors facile de déterminer une primitive, $\int \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\sin(4t)+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{3}{8}t+\mathrm{C}$.
Attaquons-nous maintenant à la linéarisation générale :

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}.$$

En s'inspirant de l'exemple précédent, nous souhaitons regrouper le terme $k=0$ avec le terme $k=n$, le terme $k=1$ avec le terme $k=n-1$ ... Il faut distinguer les cas n pair et n impair pour pouvoir compter précisément le nombre de termes dans la somme.

– Si $n=2p+1$ est impair, il y a $2p+2$ termes dans la somme que l'on sépare en deux :

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}+\sum_{k=p+1}^{2p+1}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}.$$

Effectuons alors un changement d'indice dans la deuxième somme pour inverser l'ordre des termes : $k'=n-k$. On remarque que $\binom{n}{n-k'}=\binom{n}{k'}$ et que $(n-2(n-k'))=-(n-2k')$ d'où

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}+\sum_{k'=0}^{p}\binom{n}{k'}e^{-i(n-2k')} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left[e^{i(n-2k)\theta}+e^{-i(n-2k)\theta}\right]$$

et finalement,

$$\cos^{2p+1}\theta = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos[(2p-2k+1)\theta].$$

– Si $n=2p$ est pair, il y a $2p+1$ termes dans la somme et on doit sortir le terme médian : les $(p-1)$ premiers termes correspondent à $k\in[\![0,p-1]\!]$, le terme médian à $k=p$ et les $(p-1)$ derniers termes à $k\in[\![p+1,2p]\!]$:

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}+\binom{2p}{p}+\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}$$

et avec le changement d'indice $k'=n-k$ dans la deuxième somme puis en regroupant les sommes, on trouve finalement

$$\cos^{2p}\theta = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}+\frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos\big(2(p-k)\theta\big).$$

B.3.3 Utilisation des sommes géométriques complexes

L'idée fondamentale de ce paragraphe est qu'il est souvent plus facile de calculer une somme complexe qu'une somme trigonométrique, grâce aux propriétés de l'exponentielle imaginaire.
Pour calculer la somme

$$S_n = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta),$$

introduisons la somme correspondante avec des sinus :

$$T_n = 0 + \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

et la somme des exponentielles imaginaires associées :

$$U_n = S_n + iT_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left[e^{i\theta}\right]^k.$$

Si on sait calculer U_n, on en déduit S_n et T_n en prenant les parties réelles et imaginaires : $S_n = \mathrm{Re}\,(U_n)$ et $T_n = \mathrm{Im}\,(U_n)$.
On reconnaît pour U_n une somme géométrique de raison $e^{i\theta}$. Distinguons deux cas :

1. Si $e^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire $\theta \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$U_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

   Nous voulons extraire la partie réelle et imaginaire. Utilisons la factorisation de l'angle moitié :

$$U_n = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   d'où

$$S_n = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad T_n = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. Si $e^{i\theta} = 1$, c'est-à-dire $\theta = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $U_n = n+1$ d'où $S_n = (n+1)$ et $T_n = 0$.

Vous devez penser par vous-même à introduire la somme complexe correspondante. Par exemple, pour calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, introduisez la somme des exponentielles imaginaires correspondante :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)}$$

puisque $S_n = \mathrm{Re}\,(U_n)$. Le calcul de U_n se ramène au calcul d'une somme binômiale :

$$U_n = e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[e^{i\beta}\right]^k = e^{i\alpha}\left[e^{i\beta} + 1\right]^n.$$

Il suffit alors de factoriser l'angle moitié :

$$U_n = e^{i\alpha}\left[2\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\beta}{2}}\right]^n = 2^n \cos^n\frac{\beta}{2} e^{i(\alpha+\frac{n\beta}{2})}$$

et de prendre la partie réelle :

$$S_n = 2^n \cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)\cos^n\frac{\beta}{2}.$$

Un dernier exemple : nous voulons calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$$

Nous ne pouvons pas ici introduire de somme d'exponentielles imaginaires associés. Si par exemple $U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[e^{ik\theta}\right]^2$, nous n'avons pas $S_n = \mathrm{Re}\,(U_n)$! Pour calculer cette somme, il suffit de linéariser $\cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left[\cos(2k\theta) + 1\right]$ et on a alors

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) + \frac{(n+1)}{2}.$$

Vous pouvez terminer le calcul en introduisant la somme complexe $U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{2ik\theta}$.

B.4 Calculs sur des polynômes

B.4.1 Les trinômes

Le but de ce paragraphe est de rappeler les principales propriétés des trinômes qui doivent être parfaitement connues.

Discriminant réduit

On considère un polynôme du second degré

$$\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On sait calculer ses deux racines complexes x_1, x_2 à l'aide du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

– Si $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double donnée par $x = -\dfrac{b}{a}$.
– Si $\Delta \neq 0$, le trinôme possède deux racines complexes distinctes. On commence par calculer une racine carrée complexe de Δ, c'est-à-dire un complexe δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ et on obtient

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{-b-\delta}{2a}, \\ \\ x_2 &= \dfrac{-b+\delta}{2a}. \end{cases}$$

– Si $\Delta < 0$ est un réel strictement négatif, on sait que les deux racines complexes sont conjuguées : $x_2 = \overline{x_1}$.
Lorsque le trinôme s'écrit

$$\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + 2b\mathrm{X} + c$$

(utile lorsque b est entier), on peut utiliser directement le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$ et exprimer les racines à l'aide d'une racine carrée complexe de Δ' ($\delta'^2 = \Delta'$) :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{-b-\delta'}{a}, \\ \\ x_2 &= \dfrac{-b+\delta'}{a}. \end{cases}$$

Cela évite la simplification par 2 dans les expressions …

Exemple 2.8 Pour résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$, on écrit $\Delta' = 2^2 - 3 = 1$ et les deux racines sont $x_1 = 2 + 1 = 3$ et $x_2 = 2 - 1 = 1$.

Exemple 2.9 Une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilise le discriminant réduit. Soit E un espace euclidien et $x, y \in \mathrm{E}$ deux vecteurs, considérons (lorsque $x \neq 0_\mathrm{E}$) le trinôme

$$\mathrm{T}(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \left(x \mid y\right) + \|y\|^2.$$

Puisqu'une norme ne prend que des valeurs positives, ce trinôme ne prend que des valeurs positives et ne possède donc au plus qu'une racine réelle. Son discriminant réduit est négatif ou nul :

$$\Delta' = \left(x \mid y\right)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$

d'où $\left|\left(x \mid y\right)\right| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Relations entre coefficients et racines

En notant x_1, x_2 les deux racines complexes du polynôme $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, on a

$$\mathrm{P} = a(\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2) = a\left[\mathrm{X}^2 - (x_1 + x_2)\mathrm{X} + x_1 x_2\right].$$

En identifiant les coefficients de P, on déduit la somme et le produit des racines sans avoir à les calculer explicitement :

♡ **2.16**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a}, \\ \\ x_1 x_2 &= \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Exemple 2.10 Déterminons l'expression logarithmique de argsh(x). Soit $x \in \mathbb{R}$, notons $y = \text{argsh}(x)$:

$$x = \text{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

En notant $\text{Y} = e^y$, Y est racine d'un trinôme : $x = \dfrac{\text{Y} - 1/\text{Y}}{2} = \dfrac{\text{Y}^2 - 1}{2\text{Y}}$. On en déduit que

$$\text{Y}^2 - 2x\text{Y} - 1 = 0.$$

Le discriminant réduit vaut $\Delta' = x^2 + 1 > 0$ et le trinôme possède deux racines réelles distinctes

$$\begin{cases} \text{Y}_1 &= x + \sqrt{x^2+1} > 0, \\ \text{Y}_2 &= x - \sqrt{x^2-1} < 0. \end{cases}$$

En effet, puisque $\text{Y}_1\text{Y}_2 = -1 < 0$, l'une des racines est positive, l'autre est négative et puisque de façon évidente $\text{Y}_1 > 0$, il vient que $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ d'où

$$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Déterminons de même l'expression logarithmique de $y = \text{argch}(x)$ pour $x \geqslant 1$. Avec les mêmes notations,

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{\text{Y} + 1/\text{Y}}{2} = \frac{\text{Y}^2 + 1}{2}$$

et

$$\text{Y}^2 - 2x\text{Y} + 1 = 0.$$

Le discriminant réduit $\Delta' = x^2 - 1 \geqslant 0$ est toujours positif d'où les deux racines

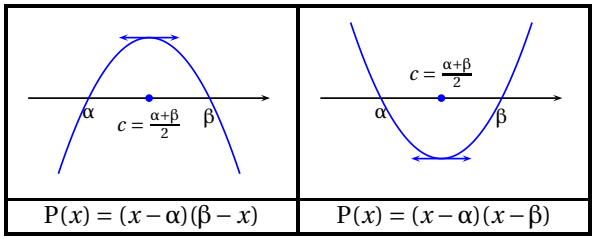
$$\begin{cases} \text{Y}_1 &= x + \sqrt{x^2-1}, \geqslant 1 \\ \text{Y}_2 &= x - \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Puisque $\text{Y}_1\text{Y}_2 = 1$, les deux racines ont même signe (> 0), l'une est supérieure et l'autre inférieure à 1. Puisque $\text{Y}_1 \geqslant x \geqslant 1$, et que $y = \text{argch}(x) = \ln \text{Y} \geqslant 0$, il vient $\text{Y} \geqslant 1$ d'où $\text{Y} = \text{Y}_1$ et $\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Extrémum d'un trinôme

La courbe représentative d'un trinôme $y = \text{P}(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.

1. $a > 0$: la parabole est convexe et atteint son maximum en $c = -\dfrac{b}{a}$: le milieu des racines de P (lorsque P possède deux racines réelles).
2. $a < 0$: la parabole est concave et atteint son minimum en $c = -\dfrac{b}{a}$: le milieu des racines de P (lorsque P possède deux racines réelles).



$\text{P}(x) = (x-\alpha)(\beta-x)$	$\text{P}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$

Il suffit d'étudier les variations de P : $\text{P}'(x) = 2ax + b$ et P' s'annule en $-b/a$.

Exemple 2.11 $\sup\limits_{x\in[0,1]} x(1-x) = \dfrac{1}{4}$ Le trinôme admet un maximum atteint en $x = 1/2$ (milieu des racines 0, 1) et la valeur du maximum vaut $1/4$.

Exercice 2.1 ♡♡

On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$$

a. *Montrer que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. Déterminer un équivalent simple de u_n.

Solution :

a. Le trinôme $P = X(n-X)$ a pour racines 0 et n et atteint son maximum sur $[0,n]$ en $c = n/2$. Le maximum vaut $n^2/4$. On majore facilement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^3} n \times \sqrt{n^2/4} = \frac{1}{2n}$$

et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. Écrivons

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}\right] = \frac{S_n}{n}$$

où S_n est une somme de Riemann qui converge vers $L = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$ Mais la courbe d'équation $y = \sqrt{x(1-x)}$ a pour équation $y^2 = x - x^2$ et on reconnaît un demi-cercle centré en $(1/2, 0)$ de rayon $1/2$. L'intégrale L est l'aire d'un demi-disque de rayon $1/2$ et vaut donc $L = \pi/8$. Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8n}$.

B.4.2 Développement de polynômes

Pour développer un produit de polynômes, il est indispensable de mener les calculs en une seule ligne. Par exemple, pour développer

$$P(X) = (X^2+3X-2)(X^3+2X^2-3X+1)$$

il est très maladroit d'écrire :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^2(X^3+2X^2-3X+1) + 3X(X^3+2X^2-3X+1) - 2(X^3+2X^2-3X+1) \\ &= X^5+2X^4-3X^3+X^2+3X^4+6X^3-9X^2+3X-2X^3-4X^2+6X-2 \\ &= X^5+5X^4+X^3-12X^2+9X-2. \end{aligned}$$

En effet, recopier mécaniquement des termes mène à une perte d'attention, source fréquente d'erreurs.
La bonne méthode pour mener ce calcul consiste à :
– déterminer le degré d du polynôme produit (somme des degrés),
– déterminer pour $k \in [\![0,d]\!]$ d'où vient le terme en X^k et sommer les coefficients sélectionnés,
– écrire *en une seule ligne* le résultat.

Multimédia : Coefficients entiers de 2 (ou 3) polynômes choisis au hasard, pour calculer le coefficient de X^k, griser dynamiquement les termes du produit et collecter les coefficients en bas. Exerciseur ?

Détaillons cette technique sur notre exemple. Les opérations suivantes se font de tête et ne nécessitent qu'une seule ligne !
Le degré du polynôme P vaut 5.
– Le terme en X^5 ne provient que du produit de X^2 avec X^3 et le coefficient de X^5 vaut donc 1 :

$$(\boxed{X^2}+3X-2)(\boxed{X^3}+2X^2-3X+1).$$

– Le terme en X^4 provient du produit de X^2 avec $2X^2$ (coefficient 2)

$$(\boxed{X^2}+3X-2)(X^3+\boxed{2X}^2-3X+1),$$

du produit de $3X$ avec X^3 (coefficient 3)

$$(X^2+\boxed{3X}-2)(\boxed{X^3}+2X^2-3X+1)$$

et le coefficient de X^4 vaut donc $2+3=5$.
– Le terme en X^3 provient du produit de X^2 avec $-3X$,

$$(\boxed{X^2}+3X-2)(X^3+2X^2\boxed{-3X}+1),$$

du produit de $3X$ avec $2X^2$

$$(X^2+\boxed{3X}-2)(X^3+\boxed{2X^2}-3X+1)$$

et du produit de -2 avec X^3

$$(X^2+3X\boxed{-2})(\boxed{X^3}+2X^2-3X+1).$$

Le coefficient vaut donc $-3+6-2=1$.

– Le terme en X^2 a pour coefficient $1-9-4=-12$:

$$(\boxed{X^2}+3X-2)(X^3+2X^2-3X\boxed{+1}),$$

$$(X^2+\boxed{3X}-2)(X^3+2X^2\boxed{-3X}+1),$$

$$(X^2+3X\boxed{-2})(X^3+\boxed{2X^2}-3X+1).$$

– Le terme en X a pour coefficient $3+6=9$

$$(X^2+\boxed{3X}-2)(X^3+2X^2-3X\boxed{+1}),$$

$$(X^2+3X\boxed{-2})(X^3+2X^2\boxed{-3X}+1).$$

– Le terme constant provient du produit des deux constantes et vaut -2.

$$(X^2+3X\boxed{-2})(X^3+2X^2-3X\boxed{+1}).$$

Il faut impérativement adopter cette technique de calcul. Dans un premier temps, vous pouvez utiliser le brouillon pour noter les coefficients que vous récoltez et ensuite les sommer. Avec un peu d'habitude, ce calcul se fait de tête immédiatement.

Exercice 2.2

Développer les polynômes suivants :

1. $(X^3+X^2-X+2)(2X^2+X-1)$;
2. $(2X^4+3X^2-6X-1)(X^3-2X^2+X+1)$;
3. $(X^5+X^4-2X^2+3)(2X^3-X^2+X-1)$.

Solution :

1. $2X^5+3X^4-2X^2+3X-2$;
2. $2X^7-4X^6+5X^5-10X^4+14X^3-X^2-7X-1$;
3. $2X^8+X^7-4X^5+X^4+4X^3-X^2+3X-3$.

Exercice 2.3

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 *en* 0 *de :*

a. $\sin(x)\exp(x)$;

b. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution :

a.

$$\begin{aligned}e^x\sin(x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &= x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))\\ &= x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &= x(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3))(1-x+x^2-x^3+o(x^3))\\ &= x(1-\frac{3}{2}x+\frac{11}{6}x^2-\frac{25}{12}x^3+o(x^3))\\ &= x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Pour développer un produit de trois polynômes, on peut utiliser la même technique et chercher directement d'où provient le terme X^d.

Exemple 2.12 Développer

$$P(X) = (X^2+X-1)(X^2+3X-1)(X-5).$$

Le degré du produit vaut 5.
– Le terme en X^5 provient uniquement du produit

$$(\boxed{X^2}+X-1)(\boxed{X^2}+3X-1)(\boxed{X}-5)$$

et vaut X^5.
– Le terme en X^4 provient des produits :

$$(\boxed{X^2}+X-1)(\boxed{X^2}+3X-1)(X\boxed{-5}),$$

$$(\boxed{X^2}+X-1)(X^2+\boxed{3X}-1)(\boxed{X}-5),$$

$$(X^2+\boxed{X}-1)(\boxed{X^2}+3X-1)(\boxed{X}-5)$$

et le coefficient de X^4 vaut donc $-5+3+1=-1$.
– Terminer le calcul de cette façon.
Si vous n'êtes pas à l'aise avec cette méthode, vous pouvez effectuer le calcul en deux lignes en ne faisant que des multiplications de *deux* polynômes en utilisant la méthode précédente (une multiplication par ligne) :

$$\begin{aligned} P = P(X) &= (X^2+X-1)(X^2+3X-1)(X-5) \\ &= (X^2+X-1)(X^3-2X^2-16X+5) \\ &= X^5-X^4-19X^3-9X^2+21X-5. \end{aligned}$$

B.4.3 Factorisation de polynômes

Il est tout aussi important de savoir factoriser un polynôme. Rappelons que Maple permet de développer et de factoriser les polynômes :

MAPLE

```
> P := (x+1)*(x^2-3*x+2);
                                    2
                     P := (x + 1) (x  - 3 x + 2)
> expand(P);
                              3      2
                             x  - 2 x  - x + 2
> Q := X^4 + 2*X^3 - 11*X^2 - 12*X + 36;
                         4      3       2
                  Q := X  + 2 X  - 11 X  - 12 X + 36
> factor(Q);
                                2        2
                           (X + 3)  (X - 2)
```

La factorisation d'un polynôme revient à déterminer ses racines (complexes). On se heurte ici à l'un des principaux problèmes des mathématiques. Depuis l'antiquité, on connaît un algorithme pour trouver les racines d'un polynôme de degré 2 et on sait également déterminer les racines d'un polynôme de degré 3 et de degré 4.

À faire : Manu : note historique + précise avec photo?

On a cherché longtemps un algorithme similaire permettant d'exprimer les racines d'un polynôme de degré 5 à l'aide de radicaux faisant intervenir les coefficients du polynôme. Abel puis Galois ont montré que ce problème était insoluble.

Cette obstruction au calcul de racines d'un polynôme se retrouve dans toutes les branches des mathématiques :

Exemple 2.13 On sait *en théorie* primitiver une fraction rationnelle. *En pratique*, il faut être capable de la décomposer en éléments simples. Pour cela, la première étape consiste à factoriser le polynôme au dénominateur. Dès que le degré du dénominateur est supérieur à 5 on est bloqué. Voici une réponse de Maple pour le calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+x^5+1}$:

MAPLE

```
int( 1/(x^6+x^5+1), x);
   -----
    \                336657046555205   5   43328897320370   4
     )    _R ln(x - --------------- _R  - -------------- _R
    /                 363446734701           363446734701
   -----
  _R = %1
           7892189829980   3   408178287515   2   2020667424601
         - ------------- _R  - ------------ _R  + ------------- _R
           363446734701        121148911567        363446734701

           43796810471
         + ------------)
           363446734701
                       6         4        3        2
                       % 1 := RootOf(43531 _Z + 540 _Z + 80 _Z + 10 _Z
                       % + _Z + 1)
```

Ce n'est pas tout à fait ce que l'on appelle une primitive explicite ...

On est souvent confronté à cette obstruction fondamentale en calcul scientifique et le seul choix possible consiste à utiliser des méthodes numériques pour déterminer des valeurs approchées des racines d'un polynôme. Heureusement, on dispose d'algorithmes très efficaces pour trouver ces valeurs approchées (vous connaissez déjà la méthode de Newton par exemple ...). Voici un calcul avec Maple qui illustre l'impossibilité de trouver les valeurs exactes des racines d'un polynôme. Une méthode numérique permet cependant de trouver des racines réelles approchées :

Exemple 2.14

```
P := x^10 -2*x - 1;
                                  10
                          P := x   - 2 x - 1
> factor(P);
                             10
                            x   - 2 x - 1
> solve(P = 0, x);
                                  10
                       RootOf(_Z   - 2 _Z - 1)
> fsolve(P=0, x);
                      -.4995164207, 1.125099677
```

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons voir quelques techniques qui permettent de factoriser de façon explicite un polynôme dans certains cas très particuliers.

Factoriser à partir d'une racine connue

On veut factoriser un polynôme P de degré d. Si l'on connaît une racine α de ce polynôme, on se ramène à la factorisation d'un polynôme Q de degré $(d-1)$ en factorisant $(X-\alpha)$ dans P. Considérons le polynôme

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

On voit que $\alpha = 1$ est racine évidente de P puisque $1 - 5 \times 1 + 7 \times 1 - 3 = 0$. On peut donc écrire

$$P = (X-1)Q(X)$$

Il faut savoir écrire *en une seule ligne* le polynôme Q en utilisant la méthode suivante :
– $P = X^3 - 5X^2 + 7X - 3$
– Le degré du polynôme Q vaut 2 : $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
– On détermine le coefficient a puisque le produit de X avec aX^2 doit donner le terme en X^3 de P : $a = 1$

$$P = (X-1)(X^2 + ?X + \ldots).$$

– On cherche le coefficient de X dans Q en examinant le terme X^2 du produit : $(-1+?)X^2 = -5X^2$ d'où $? = -4$:

$$P = (X-1)(X^2 - 4X + ?).$$

– On s'intéresse ensuite au terme en X dans le développement : $(?+4)X = 7$ d'où $? = 3$.

$$P = (X-1)(X^2-4X+3).$$

– On vérifie notre calcul en calculant le terme constant du produit : $(-1)\times 3 = -3$ qui est bien le coefficient constant de P.
Voici un autre exemple. Nous détaillons ici les calculs en plusieurs étapes afin d'illustrer la méthode, mais vous devez mener ce calcul de tête *en une seule ligne* !

$$P = 2X^5 - X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2.$$

On voit immédiatement que 1 est racine évidente de P (la somme des coefficients est nulle) et on factorise en une seule ligne P en suivant les étapes suivantes :
– $P = (X-1)(2X^4 \dots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 \dots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 - 2X^2 \dots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 - 2X^2 - X \dots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 - 2X^2 - X + 2)$,
– On vérifie le coefficient constant.
Multimédia : Applet exerciseur

Trouver toutes les racines rationnelles

La méthode précédente permet de factoriser $(X-\alpha)$ où α est une racine de P. Encore faut-il être capable de trouver une racine « évidente » du polynôme P ! Pour un polynôme quelconque, c'est impossible comme nous l'avons vu dans l'introduction. Il existe tout de même quelques méthodes à connaître.
D'abord des remarques évidentes :
– Si le coefficient constant est nul, on peut factoriser X !

$$X^5 + 4X^2 - 5X = X(X^4 + 4X - 5) = X(X-1)(X^3 + X^2 + X + 5)$$

$$X^6 - 4X^5 + 3X^3 = X^3(X^3 - 4X^2 + 3) = X^3(X-1)(X^2 - 3X - 3) = X^3(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$$

où $\alpha = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ et $\beta = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$.
– Examiner les coefficients du polynôme : si leur somme vaut 0 alors 1 est racine évidente. Regarder de même si $P(-1) = 0$.
Il existe un algorithme pour déterminer les racines *rationnelles* d'un polynôme à *coefficients rationnels*. Voir exercice 21.54 p. 804 Considérons par exemple le polynôme

$$P = X^3 - \frac{7}{6}X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{3}{2}.$$

1. On peut supposer que le coefficient constant a_0 est non-nul, sinon on peut factoriser X^k dans P et se ramener à chercher les racines d'un polynôme de degré inférieur.
2. On peut se ramener à chercher les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients *entiers* en réduisant les fractions au même dénominateur :

   $$P = \frac{a_d}{b_d}X^d + \dots + \frac{a_1}{b_1}X + \frac{a_0}{b_0} = \frac{\alpha}{\beta}(b_{d-1}\dots b_0 X^d + \dots + b_d \dots b_1).$$

   Sur notre exemple,

   $$P = \frac{1}{6}(6X^3 - 7X^2 - 9X + 9).$$

   On se ramène ainsi à chercher les racines du polynôme

   $$Q = 6X^3 - 7X^2 - 9X + 9.$$

3. Supposons que $\alpha = p/q$ soit une racine rationnelle du polynôme $Q = a_d X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0$ où $a_i \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et que les entiers p et q sont premiers entre eux : $p \wedge q = 1$. On doit avoir :

   $$0 = Q(\alpha) = a_d\frac{p^d}{q^d} + a_{d-1}\frac{p^{d-1}}{q^{d-1}} + \dots + a_1\frac{p}{q} + a_0$$

   et, en réduisant au même dénominateur,

   $$a_d p^d + a_{d-1} q p^{d-1} + \dots + a_1 q^{d-1} p + a_0 q^d = 0.$$

   On obtient ainsi une relation *entre entiers* et on peut utiliser le cours d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

4. Écrivons en factorisant p :
$$p(-a_d p^{d-1} - \cdots - a_1 q^{d-1}) = a_0 q^d.$$
On en déduit que l'entier p doit diviser l'entier $a_0 q^d$ et puisque $p \wedge q = 1$, on a aussi $p \wedge q^d = 1$ d'où en utilisant le *théorème de Gauss* :
$$\begin{cases} p \mid a_0 q^d \\ p \wedge q^d = 1 \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Gauss}} p \mid a_0.$$
L'entier p doit diviser le coefficient a_0. L'entier p ne peut donc prendre qu'un *nombre fini* de valeurs, les diviseurs de a_0. Sur notre exemple, $p \in \{1,3,9,-1,-3,-9\}$.
5. De façon symétrique, puisque
$$a_d p^d = q(-a_{d-1} p^{d-1} - \cdots - a_0 q^{d-1}),$$
on a $q \mid a_d p^d$ et, puisque $q \wedge p = 1$, il vient $q \mid a_d$ et q ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Sur notre exemple, $q \in \{1,2,3,6\}$
6. On ne peut donc avoir qu'un *nombre fini* de racines rationnelles de P, sur notre exemple
$$\alpha \in \left\{1,3,9,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6},-1,-3,-9,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{9}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right\}.$$
7. Il suffit, pour chacun de ces rationnels, de tester si $P(\alpha) = 0$. On en déduit toutes les racines rationnelles de P. Sur notre exemple, $\alpha = 3/2$ est la seule racine rationnelle de P.

B.4.4 Polynômes particuliers

Polynômes bicarrés

Si un polynôme s'écrit $P = Q(X^k)$, il suffit, pour trouver les racines de P, de déterminer les racines de Q. En effet, si $P(\alpha) = 0$, alors α^k est une racine de Q et on sait déterminer les racines k-ièmes d'un nombre complexe. Par exemple,
$$P = X^6 - 3X^3 + 2 = (X^3)^2 - 3(X^3) + 2 = Q(X^3) \text{ où } Q(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$
Les racines de P sont donc $\{1, j, j^2, \sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}, j^2\sqrt[3]{2}\}$.
Un polynôme *bicarré* est un polynôme $P = Q(X^2)$ où Q est un polynôme du second degré : $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Par exemple,
$$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 = Q(X^2) \text{ où } Q(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$
Dans le chapitre 21.6.7, on a vu que les polynômes irréductibles normalisés dans $\mathbb{R}[X]$ étaient :
– les polynômes du premier degré $(X - \alpha)$,
– les polynômes du second degré sans racines réelles : $X^2 + pX + q$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$.
Un polynôme bicarré n'est donc jamais irréductible et on peut toujours le factoriser ! On peut évidemment déterminer les racines complexes α, β de Q et les 4 racines complexes de P seront les racines carrées complexes de α et β. Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit alors de grouper ces racines conjuguées deux à deux. Cette méthode est souvent lourde et il faut connaître l'algorithme suivant qui permet d'obtenir directement la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ sans passer par les complexes.

1. Si le polynôme $Q(X) = (X-a)(X-b)$ possède deux racines réelles, $P(X) = (X^2-a)(X^2-b)$, selon le signe de a et b, on obtient directement la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$. Par exemple,
$$P(X) = (X^2-1)(X^2-2) = (X-1)(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}),$$
$$P(X) = (X^2+3)(X^2-1) = (X^2+3)(X-1)(X+1).$$
2. Si le polynôme Q ne possède pas de racines réelles, travailler directement sur le polynôme P *en groupant le terme en* X^4 *avec le terme constant* et en faisant apparaître un début de carré et en utilisant la factorisation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:
$$P = X^4 + X^2 + 1 = (X^4+1) + X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1),$$
$$P = X^4 + 1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1),$$
$$P = X^4 + 2X^2 + 2 = (X^4+2) + 2X^2 = (X^2+\sqrt{2})^2 + (2-2\sqrt{2})X^2$$
$$= (X^2 - \sqrt{2-2\sqrt{2}}X + \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2-2\sqrt{2}}X + \sqrt{2}).$$

Racines de l'unité

Certains polynômes font intervenir les racines n-ièmes de l'unité et se factorisent facilement.

Exemple 2.15 Le polynôme $P = 1+X+X^2$ a pour racines j et j^2 : $P = (X-j)(X-j^2)$. Il faut le reconnaître et le factoriser sans calculer son discriminant !

Exemple 2.16 Le polynôme $Q = X^2 - X + 1$ a pour racines $-j$ et $-j^2$ puisque $Q(-X) = P(X)$.

Plus généralement, considérons le polynôme $P = X^n - 1$. Ses racines complexes sont les n racines n-ièmes de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a l'identité remarquable $X^n - 1 = (X-1)(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1})$. Il en découle que le polynôme

$$Q = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$$

a pour racines les racines n-ièmes de l'unité sauf 1.
On sait également écrire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $P = X^n - 1$ en groupant les racines n-ièmes de l'unité avec leurs conjugués. On a toujours $P(1) = 0$ et selon la parité de n :

– si $n = 2p$ est pair, $P(-1) = 0$ et -1 est une racine n-ième de l'unité. Les $(2p-2)$ autres racines ne sont pas réelles et puisque le conjugué de ω_k est ω_{2p-k}, on peut écrire

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X-\omega_k)\left(X-\overline{\omega_k}\right) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

– si $n = 2p+1$ est impair, -1 n'est pas une racine de l'unité et en groupant les $2p$ racines différentes de 1, on trouve

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

Polynômes réciproques

Cette technique est beaucoup moins importante que les précédentes. Vous pouvez la sauter en première lecture.
Un polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ est dit *réciproque* lorsque ses coefficients sont symétriques : $\forall i \in [\![0, d]\!]$, $a_i = a_{d-i}$. Par exemple, le polynôme

$$P = 6X^4 + 5X^3 - 38X^2 + 5X + 6$$

est réciproque ($a_4 = a_0$, $a_3 = a_1$, $a_2 = a_2$).

– Une remarque importante : un polynôme est réciproque si et seulement si

$$\forall x \neq 0, \quad P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^d}.$$

Sur notre exemple,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x^4} + \frac{5}{x^3} - \frac{38}{x^2} + \frac{5}{x} + 6 = \frac{6 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6}{x^4} = \frac{P(x)}{x^4}.$$

On en déduit que si $x \neq 0$ est une racine de P, alors $1/x$ est également une racine de P. Il suffit donc de trouver deux racines de P pour les connaître toutes.

– Voyons une technique pour calculer les racines de P qui réduit le problème à chercher les racines d'un polynôme de degré $d/2$ lorsque d est pair. Nous allons illustrer la technique sur notre exemple. Une fois l'idée comprise, elle se généralise sans problème à tous les polynômes à coefficients symétriques. Soit $x \neq 0$ une racine de P, en divisant par x^2, on obtient

$$0 = 6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38.$$

Posons $y = x + \dfrac{1}{x}$, calculons

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \text{ d'où } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

et y doit donc être racine d'un polynôme de degré 2 :

$$0 = 6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 6y^2 + 5y - 50 = 0.$$

On cherche les racines de ce trinôme. On trouve $y = 5/2$ ou $y = -10/3$ et il suffit ensuite de résoudre deux équations du second degré en x :

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}, \\ x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{2}, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 = 0, \\ x^2 + \dfrac{10}{3}x + 1 = 0. \end{cases}$$

On trouve finalement $x \in \{2, 1/2, -3, -1/3\}$, d'où la factorisation de notre polynôme, $P = (X-2)(X-1/2)(X+3)(X+3)(X+1/3)$.

Lorsque le degré d est impair, il est facile de voir que $P(-1) = 0$ et, en factorisant $(X+1)$ dans P, on se ramène à un polynôme de degré $(d-1)$ qui est encore réciproque. En effet, $P(X) = (X+1)Q(X)$,

$$\frac{(X+1)Q(X)}{X^d} = \frac{P(X)}{X^d} = P(1/X) = (1/X+1)Q(1/X) = \frac{X+1}{X}Q(1/X),$$

d'où l'on tire $Q(1/X) = \dfrac{Q(X)}{X^{d-1}}$ et on en déduit que Q est réciproque.

Exercice 2.4

Factoriser le polynôme $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$.

Solution : *On factorise* $(X+1)$, $P = (X+1)(X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1)$ *et on se ramène à factoriser le polynôme réciproque* $Q = X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1$. *Soit* $x \in \mathbb{C}$ *une racine de* Q, *en divisant par* x^2, *on obtient*

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

et en posant $y = x + 1/x$, y *vérifie l'équation du second degré* $y^2 + 2y - 3 = 0$, *d'où* $y = 1$ *ou* $y = -3$. *On résout alors* $x + 1/x = 1$, *soit* $x^2 - x + 1 = 0$ *d'où* $x_1 = -j$ *et* $x_2 = -j^2$, *puis* $x + 1/x = -3$ *et on trouve* $x_3 = (-3+\sqrt{5})/2$ *et* $x_4 = (-3-\sqrt{5})/2$ *(on vérifie à l'aide des quantités conjuguées que* $1/x_3 = x_4$*). Finalement,*

$$P = (X+1)(X+j)(X+j^2)\left(X + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

B.4.5 Relations entre coefficients et racines

Le but de ce paragraphe est de présenter de façon plus élémentaire, avec des exemples, les relations entre coefficients et racines d'un polynôme et de montrer des applications en calcul algébrique.

Commençons par l'exemple élémentaire d'un trinôme ayant pour racines (complexes) α et β. Il peut s'écrire sous forme développée et sous forme factorisée :

$$P = a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

$$P = a_2(X-\alpha)(X-\beta) = a_2\left[X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta)\right].$$

En identifiant les coefficients, on trouve les relations coefficients racines bien connues :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha + \beta & = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ \sigma_2 = \alpha\beta & = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}.$$

Pour un polynôme de degré 3, ayant trois racines complexes (pas nécessairement distinctes) α, β, γ, le même calcul donne :

$$P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

et

$$\begin{aligned} P &= a_3(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \\ &= a_3\left[X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma\right], \end{aligned}$$

d'où les relations entre coefficients et racines :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha+\beta+\gamma & = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ \sigma_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma & = \dfrac{a_1}{a_3} \\ \sigma_3 = \alpha\beta\gamma & = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}.$$

Un polynôme de degré n

$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

s'écrit sous forme factorisée dans $\mathbb{C}$

$$P = a_n(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)$$

où $x_1,\dots,x_n$ sont ses racines (pas nécessairement distinctes). En développant cette forme factorisée et en identifiant les coefficients, on trouve les relations coefficients racines générales :

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1+\cdots+x_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sigma_2 = x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \quad\vdots & \vdots \\ \sigma_n = x_1\dots x_n & = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Ces relations sont importantes car on a vu qu'on ne savait pas exprimer en général les racines d'un polynôme de degré $\geqslant 5$ à l'aide des coefficients. Par contre, certaines expressions faisant intervenir les racines du polynôme peuvent s'exprimer à l'aide des coefficients. Par exemple, la somme ou le produit des racines et plus généralement tous les σ_i s'expriment à l'aide des coefficients. Il est bon de connaître le résultat suivant (hors programme).
Si l'on prend l'expression des σ_i, par exemple lorsque $n=3$, $\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, on s'aperçoit que cette expression est invariante par permutation des racines (on peut par exemple échanger les indices 1 et 2, on retrouve la même expression). L'expression

$$N_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

et, plus généralement, les sommes de Newton

$$N_k = x_1^k+x_2^k+x_3^k$$

sont invariantes par permutation des racines. L'expression

$$E = x_1x_3+x_2x_3+x_1^2$$

par contre n'est pas invariante.
Il existe un théorème d'algèbre qui dit que toute expression polynomiale en $(x_1,\dots,x_n)$ (c'est-à-dire une somme-produit des x_i) invariante par permutation des racines peut s'exprimer comme un polynôme en $\sigma_1,\dots,\sigma_n$.
Prenons par exemple la somme de Newton N_2 et exprimons-la explicitement à l'aide de $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Calculons

$$\sigma_1^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

On trouve donc $N_2 = \sigma_1^2-2\sigma_2$. Calculons ensuite

$$\begin{aligned} \sigma_1N_2 &= (x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ &= N_3 - x_1x_2(x_1+x_2) - x_1x_3(x_1+x_3) - x_2x_3(x_2+x_3) \\ &= N_3 - x_1x_2(x_1+x_2+x_3) - x_1x_3(x_1+x_2+x_3) - x_2x_3(x_1+x_2+x_3) + 3x_1x_2x_3 \\ &= N_3 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$N_3 = \sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3 = \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Exercice 2.5 ♡♡

Soit $P(X) = X^3+X-1 \in \mathbb{C}[X]$. *On note* x_1,x_2,x_3 *ses trois racines complexes.*

a. *Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines sont distinctes.*

b. Effectuer la division euclidienne de X^5 *par* P.

c. En déduire la valeur de la somme

$$N_5 = \sum_{k=1}^{3} x_k^5.$$

Solution :

a. Par l'absurde, si x *est une racine double de* P*, alors* $P(x) = P'(x) = 0$*. Mais* $P'(x) = 0 \implies 3x^2+1 = 0 \implies x = \pm\dfrac{i}{\sqrt{3}}$*, qui ne sont pas des racines de* P*. Donc toutes les racines complexes de* P *sont simples.*

b. On trouve $X^5 = (X^2-1)P(X) + X^2 + X - 1$.

c. Si x_k *est une racine de* P*, alors* $x_k^5 = (x_k^2-1)P(x_k) + x_k^2 + x_k - 1 = x_k^2 + x_k - 1$*. On peut alors exprimer la somme cherchée en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines de* P *:*

$$N_5 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 + \sigma_1 - 3 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 - 3 = -2 - 3 = -5.$$

Exercice 2.6 ♡♡

Soient trois complexes $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ *de module* 1 *vérifiant* $a+b+c = 1$*. Montrer que l'un de ces trois complexes vaut* 1.

Solution : *Comme* $|a| = 1$*,* $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$ *et* $\overline{a+b+c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ *d'où* $\sigma_1 = 1$ *et* $\sigma_2 = ab+ac+bc = abc = \alpha$*. Donc* (a,b,c) *sont les racines du polynôme*

$$P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha.$$

Puisque $P(1) = 0$*, l'une des racines vaut* 1.

Exercice 2.7

Montrer qu'il n'existe pas de réels (u,v,w) *vérifiant :*

$$u+v+w = 3 \quad \text{et} \quad uv+vw+wu = 6.$$

Solution : *u,v,w seraient racines du polynôme* $P(X) = X^3 - 3X^2 + 6X + c$ *avec* $c = uvw \in \mathbb{R}$*. Mais d'après le théorème de Rolle,* P' *posséderait alors deux racines réelles distinctes, ce qui est faux.*

B.5 Calculs en algèbre linéaire

B.5.1 Symbole de Kronecker

Dans un corps $\mathbb{K}$, pour deux indices $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit le symbole de Kronecker :

♡ **2.17**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & \text{si } i = j \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Il apparaît souvent dans les calculs matriciels. La principale utilisation de ce symbole consiste à simplifier les sommes. Dans une somme $S = \sum_{i\in I} \delta_{ip} a_i$, tous les termes de la somme sont nuls, sauf celui correspondant à l'indice $i = p$: $S = a_p$.

Exemple 2.17

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{i1} a_{ii} = a_{11},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

B.5.2 Utilisation des matrices E_{pq} en calcul matriciel

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques utilisations pratiques des matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

DÉFINITION 2.1 ♡♡ **Matrices** E_{pq}
Pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit la matrice

$$E_{pq} = \left(\delta_{ip}\delta_{iq}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

Les coefficients de cette matrice sont tous nuls, sauf le coefficient à la ligne p et à la colonne q qui vaut $1_{\mathbb{K}}$.

Dans le chapitre 25, on montre que la famille constituée de ces n^2 matrices $(E_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ forme une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose en une combinaison linéaire de ces matrices :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Le produit de deux matrices de la base canonique est simple à retenir :

♡ **2.18** $\quad E_{pq} \times E_{kl} = \delta_{qk}E_{pl}$

Ces matrices fournissent des exemples simples en algèbre linéaire. Par exemple, si $p \neq q$, $E_{pq}^2 = E_{pq}E_{pq} = 0$: la matrice E_{pq} est nilpotente d'indice 2. Pour $n \geqslant 2$, l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif : $E_{12}E_{21} = E_{11}$ alors que $E_{21}E_{12} = E_{22}$ ...

Exemple 2.18 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer $\mathrm{Tr}(AE_{pq})$. Décomposons la matrice A sur la base canonique :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

En utilisant la formule du produit $E_{ij}E_{pq}$, la linéarité de la trace et la trace d'une matrice de la base canonique : $\mathrm{Tr}(E_{iq}) = \delta_{iq}$,

$$\mathrm{Tr}(AE_{pq}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{pq}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jp}\mathrm{Tr}(E_{iq}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jp}\delta_{iq} = a_{qp}.$$

Exemple 2.19 Déterminer les formes linéaires $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Soit φ une telle forme linéaire. Si l'on considère deux matrices quelconques A et B, on a $2n^2$ coefficients arbitraires et le calcul est pénible. Remarquons que si l'on connaît $\varphi(E_{ij})$ pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, φ étant linéaire, on connaîtra $\varphi(A)$ pour toute matrice A : il suffit de décomposer A sur la base canonique. Utilisons cette idée :
Puisque φ vérifie la propriété pour deux matrices quelconques, elle la vérifie en particulier pour deux matrices de la base canonique E_{pq} et E_{kl}, $\varphi(E_{pq}E_{kl}) = \varphi(E_{kl}E_{pq})$ et on doit donc avoir :

$$\forall \left(p,q,k,l\right) \in [\![1,n]\!]^4, \quad \delta_{qk}\varphi(E_{pl}) = \delta_{lp}\varphi(E_{kq})$$

Soient $\left(i,j\right) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$.
– En prenant $p = i$, $l = j$, $q = k = i$, on trouve que $\varphi(E_{ij}) = \delta_{ji}\varphi(E_{ii}) = 0$.
– En prenant $p = l = i$ et $q = k = j$, on trouve que $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$, c'est-à-dire que φ prend la même valeur sur toutes les matrices E_{ii}.
En notant $\alpha = \varphi(E_{11}) = \cdots = \varphi(E_{nn})$ cette valeur commune, on a donc $\varphi(E_{ij}) = \alpha\delta_{ij}$. Pour une matrice A quelconque,

$$\varphi(A) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\alpha\delta_{ij} = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\mathrm{Tr}(A)$$

Nous avons montré qu'il existait $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha\mathrm{Tr}$. Réciproquement, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, en posant $\varphi = \alpha\mathrm{Tr}$, φ vérifie la propriété.

Exercice 2.8 ♡
Soit deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX).$$

Montrer que $A = B$.

Solution : *Si* $A=(a_{ij})$ *et* $X=(x_{ij})$*, on calcule*

$$\mathrm{Tr}(AX)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{ki}.$$

En prenant $X=E_{pq}$*,* $x_{ki}=\delta_{kp}\delta_{iq}$*,* $\mathrm{Tr}(AX)=a_{qp}$ *et* $\forall (q,p)\in[\![1,n]\!]$*,* $a_{qp}=b_{qp}$ *d'où* $A=B$*.*

Exercice 2.9 ♡♡

Soit une sous-algèbre $\mathscr{A}$ *de l'algèbre* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. On suppose que*

$$\forall M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\quad M^2\in\mathscr{A}\implies M\in\mathscr{A}$$

Montrer que $\mathscr{A}=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Solution : *Supposons que* $\mathscr{A}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $\forall M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*,* $M^2\in\mathscr{A}\implies M\in\mathscr{A}$*. Il suffit de montrer que toute matrice* E_{ij} *de la base canonique appartient à* $\mathscr{A}$*. Comme* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*,* $0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}\in\mathscr{A}$*. Or si* $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$*,* $E_{ij}^2=E_{ij}E_{ij}=\delta_{ij}E_{ij}$*. Par conséquent, si* $i\neq j$*,* $E_{ij}^2\in\mathscr{A}$ *et* $E_{ij}\in\mathscr{A}$*. Soit maintenant* $i\in[\![1,n]\!]$*. Soit* $j\neq i$*. On sait que* $E_{ij},E_{ji}\in\mathscr{A}$ *et, puisque* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, le produit* $E_{ij}E_{ji}=E_{ii}$ *est encore dans* $\mathscr{A}$*. Comme* $\mathscr{A}$ *contient toutes les matrices de la base canonique et que c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\mathscr{A}=\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*.*

Regardons ce que donne la multiplication à gauche et à droite d'une matrice par une matrice de la base canonique :

À faire : Dessins

1. Lorsqu'on pose la multiplication $E_{pq}A$, on remarque que toutes les lignes du produit sont nulles sauf la ligne p où l'on retrouve les coefficients de la ligne L_q de la matrice A.
2. Lorsqu'on pose la multiplication AE_{pq}, toutes les colonnes du produit sont nulles sauf la colonne q où l'on retrouve les coefficients de la colonne C_p de la matrice A.

Un premier exemple illustre l'utilisation de ces matrices :

Exemple 2.20 Déterminer les matrices $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit A une telle matrice. Puisqu'elle commute avec toutes les matrices, *elle commute en particulier avec les matrices de la base canonique :*

$$\forall (p,q)\in[\![1,n]\!]^2,\quad E_{pq}A=AE_{pq}.$$

Mais on a calculé $E_{pq}A$ et AE_{pq} ci-dessus et on en déduit que $\forall j\neq q$, $a_{qj}=0$ et, en examinant le coefficient à la ligne p et à la colonne q de ces deux produits, on obtient : $\forall p,q\in[\![1,n]\!]$, $a_{qq}=a_{pp}$. En notant $\alpha=a_{11}=\cdots=a_{nn}$, on a nécessairement $A=\alpha I_n$: A est une matrice scalaire. Réciproquement, toute matrice scalaire commute avec toutes les matrices.

Exercice 2.10 ♡

Déterminer les matrices $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *qui commutent avec toutes les matrices symétriques.*

Solution : A *doit commuter avec toutes les matrices symétriques* E_{pp} *et on trouve que* A *doit nécessairement être diagonale. Ensuite,* A *doit commuter avec toutes les matrices* $S_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$ *et, en effectuant le calcul, on trouve que* A *doit être une matrice scalaire.*

B.5.3 Calcul de déterminants

Faire apparaître des zéros

C'est, peu ou prou, la méthode de Gauss. La méthode est plus souple : on peut travailler sur les lignes et sur les colonnes.

Exercice 2.11

Calculer

$$D=\begin{vmatrix}-8&0&3&2\\-1&8&-10&-7\\-2&-7&4&-9\\-5&-4&-2&1\end{vmatrix}.$$

Solution : *On est en présence d'une matrice à coefficients entiers. On utilise la méthode du pivot de Gauss. On utilise des petits pivots (en valeur absolue) pour éviter les quotients.*
$$\begin{vmatrix} -8 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & -10 & -7 \\ -2 & -7 & 4 & -9 \\ -5 & -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 7L_4 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 9L_4 \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 & 0 \\ -36 & -20 & -24 & 0 \\ -47 & -43 & -14 & 0 \\ -5 & -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$
On fait apparaître un pivot égal à 1 *:* $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$.
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 \\ -36 & -20 & -24 \\ -47 & -43 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -36 & 4 & -24 \\ -47 & -29 & -14 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 29L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -44 & 0 & -52 \\ 7 & 0 & 175 \end{vmatrix}.$$
D'où $D = -(-44 \times 189 - (-52) \times 11) = 7744$.

Factorisation

C'est l'hygiène du calcul de déterminants. Repérer un facteur commun sur une ligne ou une colonne et mettre en facteur simplifie le travail. En particulier lorsque la somme des lignes est constante, un bon réflexe est d'additionner toutes les lignes dans première, de mettre en facteur (on n'a plus que des 1 sur la première ligne) puis on peut soustraire la première colonne de toutes les autres...

Exercice 2.12

Soit a, b, c, x *quatre complexes. Factoriser*
$$D = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Solution : *En additionnant toutes les lignes dans la première, on fait apparaître* $x+a+b+c$ *:*
$$D = \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$
La présence des 1 *sur la première ligne incite à soustraire par exemple la dernière colonne dans les autres :*
$$D = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a-b & x-b & c-b & b \\ b-a & c-a & x-a & a \\ c-x & b-x & a-x & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \times (-1) \times \begin{vmatrix} a-b & x-b & c-b \\ b-a & c-a & x-a \\ c-x & b-x & a-x \end{vmatrix}$$
On additionne la deuxième ligne dans la première :
$$D = -(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & x-b+c-a & x-a+c-b \\ b-a & c-a & x-a \\ c-x & b-x & a-x \end{vmatrix} = -(x+a+b+c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & x-a \\ c-x & b-x & a-x \end{vmatrix}$$
On soustrait la troisième colonne dans la deuxième, on développe ensuite suivant la première ligne :
$$\begin{aligned} D &= -(x+a+b+c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-a & c-x & x-a \\ c-x & b-a & a-x \end{vmatrix} \\ &= -(x+a+b+c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} b-a & c-x \\ c-x & b-a \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a-b+c)\left[(c-x)^2 - (b-a)^2\right] \\ &= (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x-c-b+a)(x-c+b-a). \end{aligned}$$

Exercice 2.13

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *trois réels. Calculer*
$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \tan\frac{\alpha_1}{2} \\ 1 & \cos\alpha_2 & \tan\frac{\alpha_2}{2} \\ 1 & \cos\alpha_3 & \tan\frac{\alpha_3}{2} \end{vmatrix}.$$
Démontrer que si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ *alors* $D = 0$.

Solution : *Soit* $t_k = \tan\frac{\alpha_k}{2}$*, on a*

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2} & t_1 \\ 1 & \dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2} & t_2 \\ 1 & \dfrac{1-t_3^2}{1+t_3^2} & t_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 1-t_1^2 & t_1(1+t_1^2) \\ 1+t_2^2 & 1-t_2^2 & t_2(1+t_2^2) \\ 1+t_3^2 & 1-t_3^2 & t_3(1+t_3^2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 2 & t_1+t_1^3 \\ 1+t_2^2 & 2 & t_2+t_2^3 \\ 1+t_3^2 & 2 & t_3+t_3^3 \end{vmatrix}$$

en soustrayant la première colonne dans la deuxième. Maintenant on soustrait la première ligne dans les deux autres :

$$\mathrm{D} = \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 2 & t_1+t_1^3 \\ t_2^2-t_1^2 & 0 & t_2-t_1+t_2^3-t_1^3 \\ t_3^2-t_1^2 & 0 & t_3-t_1+t_3^3-t_1^3 \end{vmatrix} = \frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 2 & t_1+t_1^3 \\ t_2+t_1 & 0 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ t_3+t_1 & 0 & 1+t_3^2+t_1^2+t_1t_3 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la deuxième colonne,

$$\mathrm{D} = -2\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_2+t_1 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ t_3+t_1 & 1+t_3^2+t_1^2+t_1t_3 \end{vmatrix} = -2\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_2+t_1 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ t_3-t_2 & t_3^2-t_2^2+t_1(t_3-t_2) \end{vmatrix}$$

$$= -2\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_2+t_1 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ 1 & t_3+t_2+t_1 \end{vmatrix} = 2\frac{(t_2-t_1)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \left[(t_2+t_1)(t_3+t_2+t_1) - (1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2)\right]$$

$$= 2\frac{(t_2-t_1)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1-1)$$

Comme $\tan(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3) = \dfrac{\tan\vartheta_1+\tan\vartheta_2+\tan\vartheta_3}{1-\tan\vartheta_1\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_2\tan\vartheta_3-\tan\vartheta_3\ tan\vartheta_1}$*, en prenant* $\vartheta_k = \frac{\alpha_k}{2}$*, comme* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \pi$*, on en déduit que le dénominateur* $1-\tan\vartheta_1\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_2\tan\vartheta_3-\tan\vartheta_3\tan\vartheta_1$ *s'annule, autrement dit* $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1-1=0$ *et par suite* $\mathrm{D}=0$*.*
Cela signifie que les points de paramètres α_k *avec* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ *sont alignés sur la courbe* $x=\cos t; y=\tan\frac{t}{2}$*.*

Techniques polynomiales

Lorsque les coefficients sont des polynômes, le déterminant est lui-même un polynôme.

Exercice 2.14 ♡♡

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}^n$*, soit* $x \in \mathbb{C}$ *.*
Calculer

$$\mathrm{D}(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix}.$$

Solution : *On développe par rapport à la dernière colonne :*

$$\mathrm{D}(x)=(-1)^{n-1}\times(-a_0)\begin{vmatrix}1&-x&0&\dots&0\\0&1&\ddots&\vdots&0\\0&0&1&\vdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&1&\vdots\\0&\dots&\dots&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{n}\times(-a_1)\begin{vmatrix}-x&0&\dots&\dots&0\\0&1&-x&\vdots&0\\0&0&1&\vdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\dots&\dots&0&1\end{vmatrix}$$

$$+\dots+(-1)^{n+k-1}\times(-a_k)\begin{vmatrix}-x&0&\dots&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\dots&-x&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1&\vdots\\0&\dots&\dots&0&1\end{vmatrix}+\dots+(-a_{n-1}-x)\begin{vmatrix}-x&0&\dots&\dots&0\\1&-x&\ddots&\vdots&0\\0&1&-x&\vdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&-x&1\\0&\dots&\dots&1&-x\end{vmatrix}$$

En développant les déterminants par blocs (triangulaires)

$$\mathrm{D}(x)=(-1)^{n-1}\times(-a_0)\times1+(-1)^{n}\times(-a_1)\times(-x)+\dots+(-1)^{n+k-1}\times(-a_k)\times(-x)^k+\dots+(-1)^{n+n-2-1}\times(-a_{n-2})\times(-x)^{n-2}$$
$$+(-1)^{n+n-1-1}\times(-a_{n-1}-x)\times(-x)^{n-1}$$

Puis, en effectuant les calculs,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(x)&=(-1)^n a_0+(-1)^n a_1x+\dots+(-1)^n a_kx^k+\dots+(-1)^n a_{n-2}x^{n-2}+(-1)^n(a_{n-1}+x)x^{n-1}\\&=(-1)^n\left(a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n\right).\end{aligned}$$

On peut reprendre un exercice précédent en simplifiant les calculs ... à condition d'avoir le bon coup d'œil et de connaître ses déterminants de Vandermonde :

Exercice 2.15 ♡♡

Calculer

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+t_1^2&1-t_1^2&t_1(1+t_1^2)\\1+t_2^2&1-t_2^2&t_2(1+t_2^2)\\1+t_3^2&1-t_3^2&t_3(1+t_3^2)\end{vmatrix}.$$

Solution : *Comme précédemment,*

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+t_1^2&2&t_1(1+t_1^2)\\1+t_2^2&2&t_2(1+t_2^2)\\1+t_3^2&2&t_3(1+t_3^2)\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1+t_1^2&1&t_1(1+t_1^2)\\1+t_2^2&1&t_2(1+t_2^2)\\1+t_3^2&1&t_3(1+t_3^2)\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}t_1^2&1&t_1(1+t_1^2)\\t_2^2&1&t_2(1+t_2^2)\\t_3^2&1&t_3(1+t_3^2)\end{vmatrix}.$$

En utilisant la multilinéarité du déterminant :

$$\Delta=2\begin{vmatrix}t_1^2&1&t_1\\t_2^2&1&t_2\\t_3^2&1&t_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}t_1^2&1&t_1^3\\t_2^2&1&t_2^3\\t_3^2&1&t_3^3\end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est le déterminant de Vandermonde $\mathrm{V}_3(t_1,t_2,t_3)=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)$ *et le second est le coefficient de* x *dans* $\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\1&t_1&t_1^2&t_1^3\\1&t_2&t_2^2&t_2^3\\1&t_3&t_3^2&t_3^3\end{vmatrix}=\mathrm{V}_4(x,t_1,t_2,t_3)$.
Or $\mathrm{V}_4(x,t_1,t_2,t_3)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)\mathrm{V}_3(t_1,t_2,t_3)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)$.
Ainsi le coefficient de x *égale* $-(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)\mathrm{V}_3(t_1,t_2,t_3)$.
Finalement, $\Delta=-2\mathrm{V}_3(t_1,t_2,t_3)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1-1)$.

L'avantage d'être un polynôme, c'est qu'il est déterminé par un nombre fini de valeurs.

Exercice 2.16 ♡♡

1. *Soit* a,b *deux réels distincts,* $x_1,\dots,x_n$, n *nombres réels.*

En ajoutant x à chacun des éléments, calculer

$$\mathrm{D}_{a,b} = \begin{vmatrix} x_1 & b & \dots & b & b \\ a & x_2 & \dots & \dots & b \\ a & a & x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & \dots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

2. *Soit a un réel, $x_1, \dots, x_n$, n nombres réels.*
   Calculer

$$\mathrm{D}_a = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a & a \\ a & x_2 & \dots & \dots & a \\ a & a & x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

Solution :

1. *Cet exercice illustre l'adage : Plus une égalité comporte de variables, plus elle est facile à démontrer !*
   Ici on cherche à calculer $\mathrm{D}_{a,b} = \mathrm{D}_{a,b}(0)$ avec

$$\mathrm{D}_{a,b}(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & b+x & \dots & b+x & b+x \\ a+x & x_2+x & \dots & \dots & b+x \\ a+x & a+x & x_3+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & \dots & a+x & x_n+x \end{vmatrix}.$$

   $\mathrm{D}_{a,b}(x)$ est un polynôme en x.
   En retranchant la première colonne à toutes les autres puis en développant par rapport à la première colonne (ou en dérivant deux fois par rapport à x le déterminant $\mathrm{D}_{a,b}(x)$), on voit que $\mathrm{D}_{a,b}(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire une fonction affine. $\mathrm{D}_{a,b}(x) = \alpha x + \beta$.
   Maintenant, il suffit de déterminer la valeur de $\mathrm{D}_{a,b}(x)$ en deux points distincts. Par exemple en $-a$ et $-b$ on voit alors qu'on a à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire.

$$\mathrm{D}_{a,b}(-a) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - a) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_{a,b}(-b) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - b).$$

   D'où

$$\alpha = \frac{\mathrm{D}_{a,b}(-a) - \mathrm{D}_{a,b}(-b)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(\prod_{k=1}^{n} (x_k - a) - \prod_{k=1}^{n} (x_k - b)\right).$$

   En posant $\Pi_t = \prod_{k=1}^{n} (x_k - t)$, la valeur qui nous intéresse est $\beta = \mathrm{D}_{a,b}(0) = \Pi_a + a\dfrac{\Pi_b - \Pi_a}{b-a}$.

2. *a étant fixé, la fonction $\mathrm{D} : b \longmapsto \mathrm{D}_{a,b}$ est continue puisque c'est un polynôme en b.*
   Donc $\mathrm{D}_a = \mathrm{D}(a) = \lim_{b \to a} \mathrm{D}(b) = \Pi_a + a\Pi'_a = \prod_{k=1}^{n} (x_k - a) - \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (x_k - a)$.

Un exercice déjà vu :

Exercice 2.17 ♡♡

Soit a, b, c, x quatre complexes. Factoriser

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Solution : *$\mathrm{P}_{a,b,c}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Le coefficient de x^4 ne peut être obtenu qu'en prenant les x de la diagonale principale. Donc ce coefficient égale 1.*

En additionnant toutes les lignes dans la première, on trouve $x+a+b+c$:

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x)=\begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Autrement dit, le polynôme $\mathrm{X}+a+b+c$ divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$.
Cette fois nous allons multiplier la deuxième et la quatrième ligne par -1. Nous additionnons le tout dans la première ligne et nous pouvons factoriser $x-a+b-c$. Cette fois, c'est $\mathrm{X}-a+b-c$ qui divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$.
En multipliant la deuxième et la troisième ligne par -1, on trouve $\mathrm{X}-a-b+c$ divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$ et en multipliant la troisième et la quatrième ligne par -1, on trouve que $\mathrm{X}+a-b-c$ divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$.
Lorsque les quatre nombres $a+b+c$, $-a+b-c$, $-a-b+c$, $a-b-c$ sont distincts deux à deux, alors les quatre polynômes $\mathrm{X}+a+b+c$ sont premiers entre eux, donc leur produit divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$. Comme $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$ et $(\mathrm{X}+a+b+c)(\mathrm{X}-a+b-c)(\mathrm{X}-a-b+c)(\mathrm{X}+a-b-c)$ sont deux polynômes de degré 4, que le deuxième divise le premier et qu'ils sont tous deux unitaires, on a

$$\forall\, x\in\mathbb{C},\ \mathrm{P}_{a,b,c}(x)=(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)(x+a-b-c).$$

Dans le cas où au moins deux des nombres $a+b+c$; $-a+b-c$; $-a-b+c$ et $a-b-c$ sont égaux, on remplace b par $b'=b+h$ et c par $c'=c+2h$. La fonction $h\longmapsto \mathrm{P}_{a,b',c'}(x)=(x+a+b'+c')(x-a+b'-c')(x-a-b'+c')(x+a-b'-c')$ est un polynôme en h donc une application continue, qui est nulle d'après ce qui précède pour $h>0$ assez petit pour que les $a+b'+c'$, $-a+b'-c'$, $-a-b'+c'$ et $a-b'-c'$ soient tous distincts. (Il suffit de prendre h plus petit que la moitié du plus petit des nombres strictement positifs parmi $|a\pm b|$, $|a\pm c|$ et $|b\pm c|$.) Donc en faisant tendre h vers zéro, on a bien $\mathrm{P}_{a,b,c}(x)-(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)(x+a-b-c)=0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : Il faut parfois se torturer les méninges pour éviter des calculs pas forcément méchants. C'était surtout pour voir la méthode. Méthode qui est beaucoup plus efficace avec les polynômes à plusieurs indéterminées (qui ne sont pas au programme). En effet, plus il y a de variables...

Dérivation

Un déterminant peut être une fonction d'une (ou plusieurs) variable(s). Il faut savoir la dériver.

Exercice 2.18 ♡♡

Soit a,b,c,d quatre réels. On pose $\Delta(d)=\begin{vmatrix} \cos(a+d) & \sin(a+d) & \cos(b-c) \\ \cos(b+d) & \sin(b+d) & \cos(c-a) \\ \cos(c+d) & \sin(c+d) & \cos(a-b) \end{vmatrix}$.

1. *Calculer $\Delta(b-c-a)$.*
2. *Calculer la dérivée $\Delta'(d)$.*
3. *Conclure.*

Solution :

1. *On a $a+d=b-c$; $b+d=2b-c-a$; $c+d=b-a$. Donc*

$$\begin{aligned}\Delta(b-c-a)&=\begin{vmatrix} \cos(b-c) & \sin(b-c) & \cos(b-c) \\ \cos(2b-c-a) & \sin(2b-c-a) & \cos(c-a) \\ \cos(b-a) & \sin(b-a) & \cos(a-b) \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} 0 & \sin(b-c) & \cos(b-c) \\ \cos(2b-c-a)-\cos(c-a) & \sin(2b-c-a) & \cos(c-a) \\ 0 & \sin(b-a) & \cos(a-b) \end{vmatrix}\\ &=-(\cos(2b-c-a)-\cos(c-a))\begin{vmatrix} \sin(b-c) & \cos(b-c) \\ \sin(b-a) & \cos(a-b) \end{vmatrix}\\ &=(\cos(c-a)-\cos(2b-c-a))(\sin(b-c)\cos(b-a)-\cos(b-c)\sin(b-a))\\ &=(\cos(c-a)-\cos(2b-c-a))\sin(b-c-(b-a))=(\cos(c-a)-\cos(2b-c-a))\sin(a-c)\\ &=\frac{1}{2}\sin(2a-2c)-\frac{1}{2}(\sin(2b-2c)+\sin(2a-2b))=\frac{1}{2}(\sin(2a-2c)+\sin(2c-2b)+\sin(2b-2a)).\end{aligned}$$

2. *En notant $\mathrm{C}_k(d)$ la k-ième colonne. On a (voir proposition 6.3 p. 232)*

$$\Delta'(d)=\left|\mathrm{C}_1'(d)\mathrm{C}_2(d)\mathrm{C}_3(d)\right|+\left|\mathrm{C}_1(d)\mathrm{C}_2'(d)\mathrm{C}_3(d)\right|+\left|\mathrm{C}_1(d)\mathrm{C}_2(d)\mathrm{C}_3'(d)\right|.$$

(On aurait bien sûr un résultat semblable avec les lignes). On a donc

$$\Delta'(d) = -\begin{vmatrix} \sin(a+d) & \sin(a+d) & \cos(b-c) \\ \sin(b+d) & \sin(b+d) & \cos(c-a) \\ \sin(c+d) & \sin(c+d) & \cos(a-b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(a+d) & \cos(a+d) & \cos(b-c) \\ \cos(b+d) & \cos(b+d) & \cos(c-a) \\ \cos(c+d) & \cos(c+d) & \cos(a-b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(a+d) & \sin(a+d) & 0 \\ \cos(b+d) & \sin(b+d) & 0 \\ \cos(c+d) & \sin(c+d) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0+0+0$$

3. *Conclusion : $\Delta(d)$ ne dépend pas de d et $\forall d \in \mathbb{R}, \Delta(d) = \frac{1}{2}(\sin(2a-2c)+\sin(2c-2b)+\sin(2b-2a))$.*
   Plus il y a de variables...

Matrices

Les déterminants sont utiles pour les matrices, pourquoi pas l'inverse ?

Exercice 2.19

Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix}.$$

Solution : *On a*

$$\begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Á l'aide d'un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = abcd(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a).$$

En additionnant dans la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix} = -3abcd(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a).$$

Un autre exemple, déjà vu :

Exercice 2.20

Soit a,b,c,x quatre complexes. Factoriser

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Solution : *Après une bonne contemplation, il saute aux yeux que :*

$$\begin{pmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+c+b+a & -x+c+b-a & x-c+b-a & -x-c+b+a \\ x+c+b+a & -x+c+b-a & -x+c-b+a & x+c-b-a \\ x+c+b+a & x-c-b+a & x-c+b-a & x+c-b-a \\ x+c+b+a & x-c-b+a & -x+c-b+a & -x-c+b+a \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité :

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

et il suffit de vérifier que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ *est non nul. Or ses vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux.*

Enfin un exemple qui ressemble plus à une devinette :

Exercice 2.21

Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1-ps & pr-q & qs-r \\ ns-m & 1-nr & mr-s \\ mp-n & nq-p & 1-mq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n \\ q & 1 & p \\ r & s & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1+m^2+n^2 & m+q+np & n+r+ms \\ m+q+np & 1+p^2+q^2 & p+s+qr \\ n+r+ms & p+s+qr & 1+r^2+s^2 \end{vmatrix}$$

Solution : *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ q & 1 & p \\ r & s & 1 \end{pmatrix}$*. La deuxième égalité vient de*

$$\mathrm{A}^t\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ q & 1 & p \\ r & s & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & q & r \\ m & 1 & s \\ n & p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+m^2+n^2 & m+q+np & n+r+ms \\ m+q+np & 1+p^2+q^2 & p+s+qr \\ n+r+ms & p+s+qr & 1+r^2+s^2 \end{pmatrix}.$$

Pour la première, on commence par calculer les cofacteurs :

$$\det \mathrm{A}\mathrm{I}_3 = \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1-ps & ns-m & mp-n \\ pr-q & 1-nr & 1-mq \\ qs-r & nq-p & mr-s \end{pmatrix}.$$

En calculant le déterminant des deux membres :

$$(\det \mathrm{A})^3 = \det \mathrm{A}\begin{vmatrix} 1-ps & ns-m & mp-n \\ pr-q & 1-nr & 1-mq \\ qs-r & nq-p & mr-s \end{vmatrix} = \det \mathrm{A}\begin{vmatrix} 1-ps & pr-q & qs-r \\ ns-m & 1-nr & mr-s \\ mp-n & nq-p & 1-mq \end{vmatrix}$$

puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée. Lorsque A *est inversible, on obtient la première égalité en simplifiant par* $\det \mathrm{A}$*. Lorsque* A *n'est pas inversible, la matrice transposée des cofacteurs n'est pas inversible non plus. En effet, lorsqu'on la multiplie par* A *on trouve la matrice nulle. Donc les deux membres de l'égalité sont nuls.*

Polynôme caractéristique

Cette méthode sera utilisée l'an prochain.

Annexe C

Techniques d' analyse

Le Calcul infinitésimal, [...], est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER.
Jean Dieudonné, Calcul Infinitésimal, (1968).

C.1 Majorer-minorer

En algèbre, on s'intéresse particulièrement à des égalités alors que l'analyse est l'art des approximations où les majorations-minorations jouent un rôle essentiel. Dans ce paragraphe, nous allons voir un bon usage des inégalités et étudier quelques erreurs fréquentes qu'il est bon d'analyser pour ne jamais les commettre.

C.1.1 Quelques inégalités classiques

Majorations trigonométriques

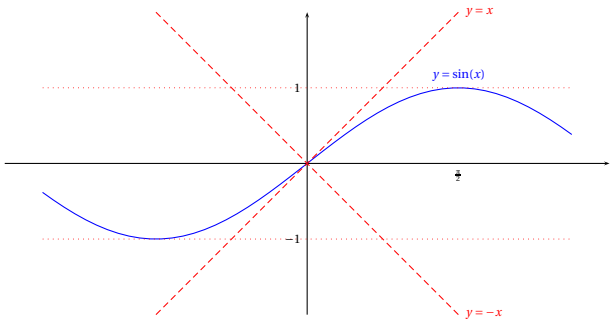
On a les majorations fondamentales en trigonométrie :

♡ **3.1** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant 1, \quad |\cos(x)| \leqslant 1.$

Préférer une majoration en valeur absolue à des inégalités lorsque c'est possible.

♡ **3.2** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$

Cette dernière majoration est surtout intéressante lorsque x est proche de 0.



Exemple 3.1 En utilisant la trigonométrie, on peut majorer une différence de sinus ou de cosinus :

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y|$$

$$|\cos x - \cos y| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y|.$$

(On aurait pu également utiliser que les fonctions sin et cos sont 1-lipschitzienne puisque $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\cos'(x)| = |\sin(x)| \leqslant 1$).

Majoration de produits

♡ **3.3** $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad |ab|\leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$

ce qui permet de majorer ab et $-ab$ par une somme de deux carrés. La démonstration s'obtient en développant $(a+b)^2\geqslant 0$ et $(a-b)^2\geqslant 0$.
Pour $2n$ réels $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$,

♡ **3.4** $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Étude de fonctions

Il est souvent utile d'étudier une fonction pour montrer une égalité.

Exemple 3.2 Montrer que $\forall x\geqslant 0$, $x-\dfrac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x$. Définissons les deux fonctions f et g sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sin x-x$ et $g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$. Elles sont dérivables et $f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$ ce qui montre que f est décroissante. Donc $\forall x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant f(0)=0$ d'où la majoration de sin. Ensuite, $g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$, $g''(x)=-\sin x+x\geqslant 0$ donc g' est croissante, et comme $g'(0)=0$, g' est positive donc g est croissante et comme $g(0)=0$, $g(x)\geqslant 0$ d'où la minoration.

	0	$+\infty$
f'	$-$	
g'	$+$	
f	0 ↘	
g	0 ↗	

Exercice 3.1 ♡
Montrer que $\forall x\geqslant 0$, $x-\dfrac{x}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$.

Solution : *En posant* $f(x)=\ln(1+x)-x$ *et* $g(x)=\ln(1+x)-x+x^2/2$, $f'(x)=-\frac{x}{x+1}\leqslant 0$ *pour* $x\geqslant 0$ *et* $g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geqslant 0$. *Dresser le tableau de variations de* f *et* g *pour conclure.*

Procéder par inégalités équivalentes

On est souvent amené à se demander si une inégalité est vraie. On peut procéder par équivalences (c'est l'un des rares cas nous vous le conseillons !) pour aboutir à une inégalité triviale.

Exemple 3.3 On veut comparer les deux réels $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Procédons par équivalence en utilisant que $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto x^2$ sont des fonctions croissantes :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2-\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{3-\sqrt{3}}\\
\iff&2-\sqrt{2}\leqslant 3-\sqrt{3}\\
\iff&\sqrt{3}-\sqrt{2}\leqslant 1\\
\iff&3-2\sqrt{6}+2\leqslant 1\\
\iff&\sqrt{6}\geqslant 2\\
\iff&6\geqslant 4
\end{aligned}$$

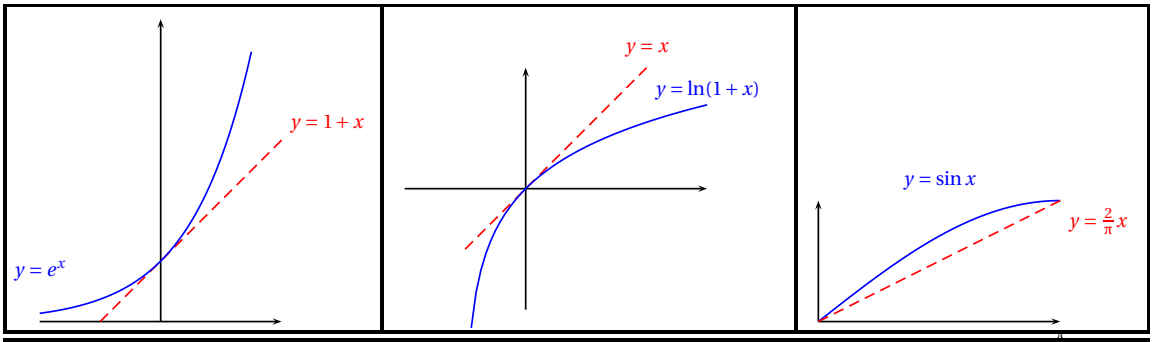
La dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\sqrt{2-\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{3-\sqrt{3}}$.

Utilisation de la convexité

♡ **3.5** $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{e^x \geqslant 1+x}.$

♡ **3.6** $\quad \forall x \in]-1,+\infty[, \quad \boxed{\ln(1+x) \leqslant x}.$

On utilise la convexité (concavité) de l'exponentielle (du logarithme). La courbe est située au dessus (en dessous) de chacune de ses tangentes.



convexité de exp	concavité de ln	concavité de sin

La fonction sinus est concave sur $[0,\pi/2]$, donc son graphe se situe au dessus de la corde. On obtient l'inégalité :

$$\forall x \in [0,\pi/2], \quad \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ étant convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha \geqslant 1$, on peut utiliser l'inégalité de convexité $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ pour obtenir l'inégalité

$$(a+b)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha).$$

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ étant convexe sur $\mathbb{R}$. En effet f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit, d'après la proposition 12.23 p. 482 en prenant les λ_k égaux à $\frac{1}{n}$ que pour tous $(x_1,\dots,x_n)$ réels,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{x_k}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+e^{x_k}\right).$$

En prenant pour les x_k les $\ln(y_k)$, on obtient pour tous $(y_1,\dots,y_n)$ réels positifs,

$$\ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(y_k)\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+y_k\right),$$

soit

$$\ln\left(1+\left(\prod_{k=1}^n y_k\right)\right) \leqslant \ln\left(\left(\prod_{k=1}^n 1+y_k\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

soit, en prenant l'exponentielle des deux membres :

$$1+\left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1+y_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

On applique cette dernière inégalité en prenant pour y_k le quotient de deux nombres positifs b_k et a_k, ce qui donne, pour tous $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$ réels positifs,

$$1+\left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1+\frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Enfin, en multipliant les deux membres par $\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}}$, on obtient :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette dernière inégalité - qui signifie que la somme des moyennes géométriques est inférieure à la moyenne géométrique de la somme - reste vraie lorsque l'un (ou plusieurs) des a_k ou b_k est nul, par passage à la limite.
Voir aussi les propositions 12.27 et 12.28 p. 484.

C.1.2 Techniques de majoration

En analyse, on utilise par défaut des *inégalités larges* ($\leqslant, \geqslant$). Une inégalité stricte peut être parfois nécessaire, mais il faut toujours la justifier. Par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$$

est une inégalité classique. Par contre la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| < |x|$$

est fausse : pour $x = 0$ l'inégalité stricte n'est pas vérifiée.

Majorer des produits-quotients

Attention aux multiplications d'inégalités :

$$a \leqslant b \implies \begin{cases} ac \leqslant bc \text{ si } c \geqslant 0 \\ ac \geqslant bc \text{ si } c < 0 \end{cases}.$$

En pratique, on utilise souvent les valeurs absolues et les termes à majorer sont positifs. Pour majorer un produit $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ de *termes positifs*, il suffit de majorer chaque terme du produit.

Exemple 3.4 $u_n = (n^2+2n+1)\ln(n^2+1)$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(n^2+1) \leqslant n^2$ et que pour $n \geqslant 1$, $2n \leqslant 2n^2$ et $1 \leqslant n^2$, on obtient la majoration grossière :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant (4n^2) \times n^2 = 4n^4.$$

Pour majorer un quotient *de termes positifs*, majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

Exemple 3.5 Encadrer pour $x \in [2,3]$ $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x+1}$. Puisque $2 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant x-1 \leqslant 2$ et $e^2+1 \leqslant e^x+1 \leqslant e^3+1$ d'où $\dfrac{1}{e^3+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{e^2+1}$.

Exemple 3.6

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2+nk}}{n^3+k^2-k}$$

Puisque lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$, $k^2+nk \leqslant 2n^2$ et $n^3+k(k-1) \geqslant n^3$, on majore

$$0 \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{\sqrt{2n^2}}{n^3} = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 3.2 ♡

Majorer (u_n) par une suite de la forme $\mathrm{C}n^\alpha$ à partir d'un certain rang :

a. $u_n = \dfrac{n^3+n^2}{n^2+1}$

b. $u_n = \dfrac{n+1}{3^{n^2-n}}$

c. $u_n = \sqrt{n^3+n^2-n+1} - \sqrt{n^3+3n}$

Solution :

a. *Pour $n \geqslant 1$, $n^3+n^2 \leqslant 2n^3$ et $n^2+1 \geqslant n^2$ d'où $u_n \leqslant 2n$.*

b. *Pour $n \geqslant 1$, $3^{n^2-n} = (1+2)^{n^2-n} \geqslant 1+2(n^2-n)$ en utilisant la formule du binôme (c'est un cas particulier de l'inégalité de Bernoulli, voir l'exercice 8.30 page 329) et en minorant les termes positifs restants par 0. Par conséquent,*

$$u_n \leqslant \frac{2n}{2n^2-2n+1} \leqslant \frac{2n}{2(n^2-n)} \leqslant \frac{n}{n^2/2} \leqslant \frac{2}{n}$$

puisque $n^2-n \geqslant n^2/2$ pour $n \geqslant 2$.

c. *Avec les quantités conjuguées,*

$$u_n = \frac{n^2-4n+1}{\sqrt{n^3+n^2+n+1}+\sqrt{n^3+n}} \leqslant \frac{2n^2}{2n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

puisque pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant n^2$.

Bonne utilisation des valeurs absolues

Une valeur absolue, un module (ou une norme) permettent de mesurer des *distances* : $|a-b|$ mesure l'écart entre les deux réels (complexes) a et b. Ce sont des outils indispensables en analyse. Par exemple, pour montrer qu'une suite converge vers une limite l, il suffit de majorer la quantité $\varepsilon_n = |u_n - l|$ par une suite qui converge vers 0. L'année prochaine, vous utiliserez des *normes* qui se manipulent comme la valeur absolue et le module. Autant prendre maintenant de bonnes habitudes et utiliser la valeur absolue aussi souvent que possible.
Les propriétés importantes sur les modules-valeurs absolues sont

1. L'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a|+|b|$
2. La minoration de l'inégalité triangulaire : $\Big||a|-|b|\Big| \leqslant |a+b|$ qui permet au choix deux minorations d'un module :

$$\begin{cases} |a|-|b| \\ |b|-|a| \end{cases} \leqslant |a+b|.$$

3. Le module d'un produit : $|a\times b| = |a|\times|b|$.

On a par exemple en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|.$$

Exemple 3.7 On définit $f(x) = \dfrac{\sin x - 2\cos x}{e^{\sin x}}$. Majorer $|f(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x)| \leqslant \frac{|\sin x| + 2|\cos x|}{e^{\sin x}} \leqslant \frac{3}{e^{-1}} = 3e.$$

On a utilisé l'inégalité triangulaire $|\sin x + 2\cos x| \leqslant |\sin x| + 2|\cos x|$, que $|\sin x| \leqslant 1$, que $e^{\sin x}$ était positive pour enlever la valeur absolue, puis que $\sin x \geqslant -1$ pour minorer le dénominateur.

Exemple 3.8 Pour $x \neq 0$, on définit $f(x) = \dfrac{|1-3x^2|-x}{x}$ Minorer $|f(x)|$ par une fonction de type Cx^α pour $|x|$ grand.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{\big||1-3x^2|-x\big|}{|x|} \\ &\geqslant \frac{|1-3x^2|-|x|}{|x|} \\ &= \frac{|3x^2-1|-|x|}{|x|} \\ &\geqslant \frac{3x^2-1-|x|}{|x|} \\ &\geqslant \frac{3x^2-2x^2}{|x|} \\ &\geqslant |x| \end{aligned}$$

On a utilisé la minoration de l'inégalité triangulaire, $\big||1-3x^2|-x\big| \geqslant |1-3x^2|-|x|$ puis l'inégalité triangulaire $|1-3x^2| \leqslant 1+3|x^2|$ et que $|x|+1 \leqslant 2|x|^2$ pour $|x| \geqslant 1$.

Exercice 3.3 ♡

Montrer que la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

est bornée.

Solution : *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

On a utilisé les inégalités classiques $|\sin\theta| \leqslant |\theta|$ *et* $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

On se sert très souvent de l'inégalité triangulaire pour majorer des sommes et des intégrales :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_n\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_n|$$

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

Pour les intégrales de Riemann, on utilise également la majoration fondamentale :

$$\boxed{\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Si f est une fonction continue sur un *segment* $[a,b]$, elle est bornée et on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On se sert très souvent de la majoration :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\|f\|_\infty}$$

Exemple 3.9 On définit la suite d'intégrales

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

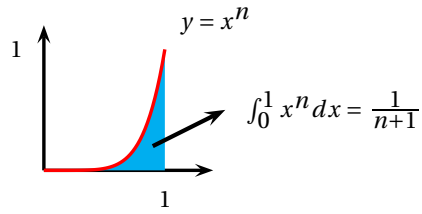
où $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue. Montrer que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La fonction f est continue sur un segment donc est bornée. Notons $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et majorons :

$$|\mathrm{I}_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |x^n||f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \|f\|_\infty\,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\|f\|_\infty}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On rencontre souvent en pratique l'intégrale

♡ **3.7**

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$



Multimédia : animation pour voir l'aire $\int_0^1 x^n f(t)dt$ qui tend vers 0

C.1.3 Erreurs de majoration fréquentes

Une faute très fréquente consiste à majorer à l'intérieur des valeurs absolues : $a \leqslant b \implies |a| \leqslant |b|$. C'est faux en général. Par exemple, $-3 \leqslant -2$ et pourtant $|-3| = 3 > 2 = |-2|$.

Exemple 3.10 Voici une erreur typique rencontrée dans une copie : puisque $\sin x \leqslant 1$ et $-\sin y \leqslant 1$, pour $x, y > 0$ on a :

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

Si on prend par exemple $x = \pi$ et $y = \pi/2$, l'inégalité obtenue s'écrit $\left|\frac{-2}{\pi}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right| = \frac{1}{\pi}$ qui est évidemment fausse.

Le résultat suivant est classique et souvent posé en devoir :

LEMME 3.1 ♡♡ **Lebesgue**
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$,

$$\mathrm{I}_n = \int_a^b \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

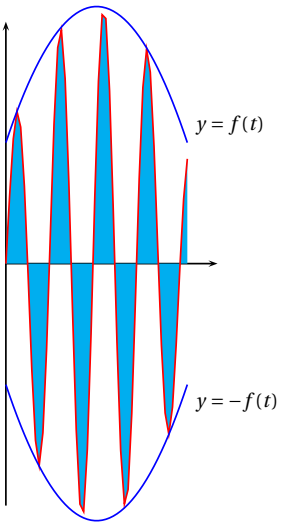
Dans les deux « démonstrations » suivantes, il y a des erreurs de majoration. Trouvez-les ! La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_n| &= \left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \|f\|_\infty \left|\int_a^b \sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \|f\|_\infty \left|\frac{\cos(nb)-\cos(na)}{n}\right| \\ &\leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_n| &\leqslant \int_a^b |f(t)||\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|f\|_\infty \int_a^b |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|f\|_\infty \frac{|\cos(nb)|-|\cos(na)|}{n} \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Dans la première série de majorations, on a majoré à l'intérieur des valeurs absolues en multipliant par $\sin t$ qui peut être négatif (deux erreurs). Dans la deuxième série, les majorations sont correctes, mais $|\sin(nt)|$ ne se primitive pas en $|\cos(nt)|/n$.

Remarque 3.1 On comprend graphiquement le résultat précédent : lorsque n est grand, la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ oscille beaucoup entre a et b et les aires positives compensent les aires négatives :



On comprend également que $\int_a^b f(t)|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$ ne converge pas vers 0 et que la dernière tentative était vouée à l'échec !

La preuve correcte est instructive et doit être étudiée soigneusement.

Démonstration ♡♡♡ *Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut intégrer par parties I_n et puisque f et f' sont continues sur le segment $[a,b]$, elles sont bornées :*

$$\mathrm{I}_n = \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_n| &\leqslant \frac{|f(b)||\cos(nb)|+|f(a)||\cos(na)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)||\cos(nt)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n} + \frac{\|f'\|_\infty (b-a)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Remarque 3.2 On montre que le résultat précédent reste vrai lorsque f est uniquement continue par morceaux sur $[a,b]$. On commence par le démontrer lorsque f est une fonction indicatrice d'un segment (la fonction indicatrice d'une partie de $\mathbb{R}$ est la fonction qui vaut 1 sur cette partie et 0 partout ailleurs), puis lorsque f est une fonction en escalier et on utilise l'approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

C.1.4 Suivre son intuition avant de majorer

Pour montrer qu'une suite (u_n) converge vers 0, on majore $|u_n|$. Par contre, pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il ne sert à rien de majorer $|u_n|$, c'est $|u_n - l|$ qu'il faudrait majorer. Avant de se lancer dans une majoration hasardeuse, il est nécessaire de comprendre intuitivement comment se comportent les différents termes.

Exemple 3.11 Étudier la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$. Commençons par écrire les différents termes de la somme d'une autre façon pour comprendre ce qui se passe :

$$u_n = \frac{1}{n!}(1 + 1\times 2 + \cdots + 1\times 2\times\cdots\times n) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)\ldots 3} + \frac{1}{n(n-1)\ldots 2}.$$

Une erreur fréquente : puisque $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, …, $\dfrac{1}{n(n-1)\ldots 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: bien que chaque terme tende vers 0, *le nombre de termes augmente* avec n. Avec le même raisonnement, on aurait $1 = \underbrace{\dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n}}_{n \text{ fois}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$!

Nous allons tout de même montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ en écrivant $u_n = 1 + \varepsilon_n$ et en montrant que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour cela, majorons ε_n : si l'on majore tous les termes de ε_n par le plus grand $1/n$, on trouve que $\varepsilon_n \leqslant (n-1)/n$ qui ne tend pas vers 0. Écrivons plutôt

$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n} + \frac{(n-2)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exemple 3.12 On pose pour $x > 0$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de F.

b. Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de F.

a. Avec une majoration simple :

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

on obtient :

$$|\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Par conséquent, $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b. Essayons d'abord un encadrement élémentaire : pour $t \in [0, \pi/2]$,

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t \leqslant t$$

on obtient pour $0 < x < 2x \leqslant \pi/2$, l'encadrement

$$\frac{2}{\pi}\ln 2 = \int_x^{2x} \frac{2t}{\pi t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2.$$

On voit que la fonction F est bornée au voisinage de zéro, mais l'encadrement obtenu ne permet de trouver la limite. Au voisinage de 0, $\sin(t)$ est proche de t : on peut utiliser l'inégalité $t - t^3/6 \leqslant \sin t \leqslant t$ vue dans l'exemple 3.2. On obtient l'encadrement :

$$\ln 2 - \frac{x^2}{4} = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{6}\int_x^{2x} t^2\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$$

et avec le théorème des gendarmes, on en déduit que $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2$.

Pour des exemples plus théoriques, lorsqu'on ne dispose pas de majorations explicites des fonctions, il est nécessaire d'utiliser les définitions à ε d'analyse pour justifier les approximations. Voyons deux exemples classiques.

Exemple 3.13 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Étudier la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le graphe de $x \mapsto x^n$ pour n grand montre que x^n est très petit, sauf au voisinage de 1 où il vaut 1. On se doute que la limite va dépendre des valeurs de f au voisinage de 1. Commençons par approximer $f(x)$ par $f(1)$ sur $[0,1]$ pour comprendre ce qui se passe (cela consiste à supposer dans un premier temps que f est constante) :

$$\mathrm{J}_n \approx nf(1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1).$$

Montrons rigoureusement que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ en écrivant pour $x \in [0,1]$, $f(x) = f(1)+r(x)$ où r est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $r(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{I}_n = \frac{n}{n+1} f(1) + \underbrace{n\int_0^1 x^n r(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{R}_n}.$$

On a déjà vu que la première suite convergeait vers $f(1)$. Il nous suffit de traiter le *reste* de notre approximation : montrons que $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour cela, écrivons une démonstration à epsilon. Soit $\varepsilon > 0$, comme $r(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, il existe $c \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [c,1]$, $|r(x)| \leqslant \varepsilon/2$. Coupons notre intégrale en deux :

$$\begin{aligned}|\mathrm{R}_n| &\leqslant n\int_0^c |r(x)|x^n\,\mathrm{d}x + n\int_c^1 |r(x)|x^n\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant nc^n\int_0^c |r(x)|\,\mathrm{d}x + n\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \mathrm{K}nc^n + \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} = \theta_n.\end{aligned}$$

Nous avons noté $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^c |r(x)|\,\mathrm{d}x$ qui est une constante indépendante de n. Puisque $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon/2$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $\theta_n \leqslant \varepsilon$ et pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $|\mathrm{R}_n| \leqslant \varepsilon$.

L'exemple précédent est typique d'une démonstration en analyse.

1. On commence par comprendre intuitivement les approximations pertinentes.
2. On met en évidence l'approximation pour isoler le résultat et on se ramène à montrer qu'un reste tend vers 0.
3. On utilise les majorations, les définitions à ε ...pour traiter le reste de l'approximation.

Exemple 3.14 1 Soit $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$. On définit pour $x \geqslant 0$, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrons que $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.
On commence par utiliser l'hypothèse en approximant f par l :

$$f(x) = l + r(x) \text{ avec } r(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Cette approximation permet de mettre en évidence la limite de F :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x l\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x r(t)\,\mathrm{d}t = l + \mathrm{R}(x).$$

Il nous suffit de montrer que $\mathrm{R}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Rédigeons pour cela une démonstration à ε.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $r(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $\forall t \geqslant \mathrm{A}$, $|r(t)| \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $\mathrm{C} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} |r(t)|\,\mathrm{d}t$. Puisque $\mathrm{C}/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe $\mathrm{B} \geqslant \mathrm{A}$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{B}$, $\mathrm{C}/x \leqslant \varepsilon/2$.

Soit $x \geqslant \mathrm{B}$, coupons l'intégrale en deux :

$$|\mathrm{R}(x)| = \left|\frac{1}{x}\int_0^{\mathrm{A}} r(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_{\mathrm{A}}^x r(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{x} + \frac{1}{x}\int_{\mathrm{A}}^x |r(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon/2 + \frac{(x-\mathrm{A})\varepsilon}{2x} \leqslant \varepsilon.$$

C.2 Dérivation

Contrairement au calcul de primitives où l'on sait primitiver très peu de fonctions à l'aide des fonctions usuelles, on sait dériver une fonction quelconque, aussi compliquée soit-elle. Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques règles simples pour calculer efficacement une dérivée sous forme factorisée. En effet, on se sert souvent du signe d'une dérivée pour étudier les variations d'une fonction, d'où l'intérêt d'obtenir une forme factorisée de ces dérivées.
Rappelons d'abord comment calculer la dérivée d'une expression à l'aide de Maple :

MAPLE

```
f := exp(x) * sin(x^3);
                          f := exp(x) sin(x^3)
> diff(f, x);
                                3                    3   2
                    exp(x) sin(x ) + 3 exp(x) cos(x ) x
> factor(%);
                                  3           3   2
                      exp(x) (sin(x ) + 3 cos(x ) x )
```

C.2.1 Dérivées particulières

Homographies

Une homographie est une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Cette fonction est définie sur les deux intervalles $I_1 =]-\infty, -d/c[$ et $I_2 =]-d/c, +\infty[$.
Une homographie se dérive facilement :

♡ **3.8**

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

Il est bon de retenir cette formule (déterminant des coefficients au numérateur, dénominateur au carré), car on rencontre souvent des homographies en pratique. Remarquez que le signe de la dérivée est donné par le signe du déterminant : les variations des homographies sont simples.
La bijection réciproque d'une homographie est encore une homographie : il faut savoir résoudre rapidement l'équation

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (cy-a)x = b - dy \quad x = -\frac{dy-b}{cy-a}.$$

On voit donc que lorsque le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est strictement positif, f définit une bijection de I_1 vers $J_1 =]-\infty, a/c[$ et de I_2 vers $J_2 =]a/c, +\infty[$.

Exercice 3.4 ♡

Dériver les homographies suivantes et déterminer l'expression de leur bijection réciproque.

a. $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x+1}$

b. $g(x) = \dfrac{2-3x}{5+x}$

Solution :

a. $f'(x) = \dfrac{11}{(2x+1)^2}$, $f^{-1}(y) = -\dfrac{y+4}{2y-3}$.

b. *Écrivons* $g(x) = -\dfrac{3x-2}{x+5}$ *d'où* $g'(x) = -\dfrac{17}{(x+5)^2}$ *et* $g^{-1}(y) = -\dfrac{5y-2}{y+3}$.

Exponentielle en facteur

On rencontre souvent en analyse des expressions de la forme

$$f(x) = e^{A(x)} \times B(x)$$

où A et B sont deux fonctions dérivables. On peut mettre $e^{A(x)}$ en facteur dans la dérivée et il est bon de retenir la formule suivante :

♡ **3.9**

$$f(x) = e^{A(x)}B(x), \quad f'(x) = e^{A(x)}\left[B'(x) + A'(x) \times B(x)\right].$$

Cette formule est à la base de la résolution des équations différentielles du premier ordre. Considérons l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Soit $y : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction solution. On considère la fonction auxiliaire définie par $f(x) = e^{\mathrm{A}(x)} \times y(x)$ où A est une primitive de a car lorsqu'on dérive f, on trouve

$$f'(x) = e^{\mathrm{A}(x)} \left[y'(x) + a(x)y(x) \right] = e^{\mathrm{A}(x)} \times b(x).$$

Par conséquent, avec le théorème fondamental, si $x_0 \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{\mathrm{A}(t)} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

et on trouve l'expression de y sur l'intervalle I en fonction de la condition initiale $y(0)$:

$$y(x) = e^{-\mathrm{A}(x)} f(x) = y(0)e^{-\mathrm{A}(x)} + e^{-\mathrm{A}(x)} \int_{x_0}^{x} e^{\mathrm{A}(t)} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut utiliser la même technique pour des inéquations différentielles :

Exercice 3.5 ♡♡

Soit $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) + f(x) \leqslant 1$. Montrer que f est bornée.

Solution : *Considérons la fonction* F *définie par* $\mathrm{F}(x) = e^x f(x)$. *Elle est dérivable et* $\forall x \geqslant 0$,

$$\mathrm{F}'(x) = e^x \left[f'(x) + f(x) \right] \leqslant e^x$$

d'où

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = e^x$$

et donc

$$f(x) = e^{-x}\mathrm{F}(x) \leqslant 1$$

Il faut savoir dériver successivement une fonction définie par

$$f(x) = e^{\mathrm{A}(x)} \times \mathrm{B}(x)$$

en utilisant de façon répétée la formule précédente. En particulier, pour résoudre des équations différentielles du second ordre, on rencontre souvent le cas où A et B sont des polynômes. Par exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} \left[x^2 + 1 \right] \\
f'(x) &= e^{x^2} \left[2x + (2x)(x^2 + 1) \right] = 2e^{x^2} \left[x^3 + 2x \right] \\
f''(x) &= e^{x^2} \left[3x^2 + 2 + (2x)(x^3 + 2x) \right] = 2e^{x^2} \left[2x^4 + 7x^2 + 2 \right] \\
f^{(3)}(x) &= 2e^{x^2} \left[8x^3 + 14x + 2x(2x^4 + 7x^2 + 2) \right] = 4e^{x^2} \left[2x^5 + 11x^3 + 9x \right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Remarquez que les calculs s'effectuent avec une ligne par dérivée. Pour chaque ligne, à la première étape, appliquer la formule de dérivation, à la deuxième étape, ordonner le polynôme en facteur.

C.2.2 Règle de la chaîne

Il s'agit simplement de la formule de la dérivée d'une fonction composée

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$$

Cette formule s'étend par récurrence à la composée de n fonctions (on dérive *à la chaîne*) :

$$(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)' = (f_1' \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n) \times (f_2' \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n) \times \cdots \times (f_{n-1}' \circ f_n) \times f_n'$$

Remarquez que le résultat est donné sous forme de produit, donc est automatiquement factorisé !
Remarquez aussi que pour une fonction composée, il est parfois plus rapide d'utiliser la « règle des signes »pour les variations d'une fonction (voir 11.4 page 416) que de calculer sa dérivée.

Exemple 3.15 Déterminer la dérivée et les variations de la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{2e^{x^2}+1}{e^{x^2}+1}\right)\right)$$

On calcule avec la règle de la chaîne et la dérivée d'une homographie en une ligne :

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{2e^{x^2}+1}{e^{x^2}+1}\right)} \times \operatorname{sh}\left(\frac{2e^{x^2}+1}{e^{x^2}+1}\right) \times \frac{1}{(e^{x^2}+1)^2} \times e^{x^2} \times (2x)$$

Tous les facteurs étant toujours positifs sauf le dernier, la fonction est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3.6 ♡♡

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est dérivable et calculer sa dérivée. Les résultats seront factorisés et on déterminera le signe de la dérivée.

a. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

b. $f(x) = \ln(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1})$

c. $f(x) = \arctan\dfrac{\ln x}{3}$

d. $f(x) = e^x \arctan(e^x) - \ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.

e. *Pour* $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \dfrac{k}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right)$

f. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

g. $f(x) = \arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

h. $f(x) = x^{(x^2)}$

i. $f(x) = \ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{\sin x}$

j. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x} - \ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

k. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{1}{2a}\arctan\dfrac{x}{a}$

l. $f(x) = \arctan\dfrac{3x - x^3}{1-3x^2}$

m. $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$

n. $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$

o. $f(x) = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x}$

p. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$

q. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^x - x^{-x}}{2}\right)$

r. $f(x) = \dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x - x - 1)$

s. $f(x) = \log_{e^2}(x^n + \sqrt{x^{2n}+1})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

t. $f(x) = \ln[\ln x(\ln\ln\ln x - 1)]$.

Solution :

a. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. *Par conséquent,* $x + \sqrt{x^2+1} > |x| + x \geqslant 0$. *La fonction est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on trouve* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 0$.

b. *Il faut que* $\sin x > 1/2$, *c'est à dire* $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi + \pi/6, 2k\pi + 5\pi/6[$. *On trouve ensuite* $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}} \geqslant 0$.

c. *La fonction* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et*

$$f'(x) = \frac{3}{x(9+\ln^2 x)} > 0.$$

d. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = e^x \arctan e^x > 0$.

e. *Il faut que* $x^2 > -k$. *Donc si* $k > 0$, f *est définie et dérivable sur* $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. *Si* $k \leqslant 0$, f *est définie sur* $\left]-\infty, -\sqrt{-k}\right] \cup \left[\sqrt{-k}, +\infty\right[$ *et dérivable sur* $\left]-\infty, -\sqrt{-k}\right[\cup \left]\sqrt{-k}, +\infty\right[$. *On calcule*

$$f'(x) = \sqrt{x^2+k}.$$

f. *Il faut que* $\cos x > 0$ *et* $\sin x > -1$, *c'est à dire* $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2[$. *On trouve que*

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^3 x} > 0.$$

g. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$. *Puisque* $x^2 \leqslant \dfrac{1+x^4}{2}$, $\dfrac{2x^2}{1+x^4} \leqslant 1$ *et la fonction est définie sur* $\mathbb{R}$. *On a* $\dfrac{2x^2}{1+x^4} = 1$ *si et seulement si* $x = \pm 1$ *et donc* f *est dérivable sur* $\mathrm{I}_1 =]-\infty,-1[$, $\mathrm{I}_2 =]-1,1[$ *et* $\mathrm{I}_3 =]1,+\infty[$. *On calcule*

$$f'(x) = \frac{4x(1-x^4)}{|1-x^4|(1+x^4)} = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \in \mathrm{I}_2 \\ -\dfrac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_3 \end{cases}.$$

h. *La fonction* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$f'(x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

i. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[$. *Si* x *est élément de cet ensemble :* $f'(x) = \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$.

j. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$. *Si* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\dfrac{\arctan x}{x^2}$.

k. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$ *et pour* x *dans cet ensemble,* $f'(x) = \dfrac{x^2}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}$.

l. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ *et si* x *est élément de cet ensemble,* $f'(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

m. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et si* $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

n. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et si* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{x^4+1}}$.

o. *La fonction* f *est définie sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$. *De plus, si* $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

p. *Puisque* $|\sin x| < \sqrt{1+\sin^2 x}$, *la fonction est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

q. *La fonction est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et* $f'(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x^x + x^{-x}}$.

r. *La fonction est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et* $f'(x) = \dfrac{x^{x+1}\ln x(\ln x - 1)}{e^x}$.

s. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}$.

t. *La dérivée de* f *est* $f'(x) = \dfrac{\ln\ln\ln x}{x\ln x}$.

C.3 Manipulation de bornes supérieures

Dans ce paragraphe, nous allons voir en pratique comment manipuler les bornes supérieures et inférieures définies dans le chapitre sur les nombres réels 9.4 page 342. Avant toute chose, retenez que l'on ne manipule jamais les bornes supérieures en écrivant une suite d'égalités, mais en justifiant des *inégalités*. La technique principale s'appelle le *raisonnement de passage à la borne supérieure* et utilise la définition même de la borne supérieure, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de la partie.

PLAN 3.1 : Passage à la borne supérieure

On veut montrer que la borne supérieure d'une partie A *est majorée par un réel* M. *Il suffit de justifier que* M *est un majorant de la partie :*

1. *Soit* $x \in \mathrm{A}$, $\ldots x \leqslant \mathrm{M}$.
2. *Alors, puisque* $\sup \mathrm{A}$ *est le plus petit des majorants de* A, $\sup \mathrm{A} \leqslant \mathrm{M}$.

Exemple 3.16 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$. Montrer que les parties $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ et $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ possèdent une borne supérieure et que $\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leqslant \max(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B})$, $\sup(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leqslant \min(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B})$.
– On vérifie facilement que les deux parties sont non vides et majorées ce qui justifie l'existence des bornes supérieures.

– Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$ et si $x \in B$, $x \leqslant \sup B$. Dans les deux cas, $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$ ce qui montre que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
– Soit $x \in A \cap B$. Puisque $x \in A$, $x \leqslant \sup A$ et puisque $x \in B$, $x \leqslant \sup B$ donc $x \leqslant \min(\sup A, \sup B)$. Le réel $\min(\sup A, \sup B)$ est donc un majorant de $A \cap B$ et par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.

On ne raisonne jamais directement avec des égalités entre bornes supérieures, mais on *justifie* toujours les égalités en suivant le plan suivant.

PLAN 3.2 : **Pour montrer $\sup A = \sup B$**

Pour montrer que deux bornes supérieures sont égales, on montre deux inégalités en utilisant deux passages à la borne supérieure.

1. *Montrons que* $\sup A \leqslant \sup B$.
2. *Montrons que* $\sup B \leqslant \sup A$.

Exemple 3.17 Soient deux parties A, B non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{a + b;\ (a, b) \in A \times B\}.$$

Montrons que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
– A et B possèdent une borne supérieure puisque ce sont des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Puisque $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$ et de même, il existe $b \in B$. Alors l'élément $a + b$ appartient à la partie $A + B$ ce qui justifie qu'elle est non vide. Notons M_A un majorant de A et M_B un majorant de B. Soit $x \in A + B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$ et alors $x \leqslant M_A + M_B$. Nous avons montré que $M_A + M_B$ est un majorant de la partie $A + B$. Par conséquent, $\sup(A + B)$ existe.
– Montrons que $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Soit $x \in A + B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$ et alors comme $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$, $x \leqslant \sup A + \sup B$. Le réel $\sup A + \sup B$ est donc un majorant de la partie $A + B$. Puisque $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants, on a $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$.
– Montrons que $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B)$. La technique de passage à la borne supérieure permet de majorer une borne supérieure. Isolons donc dans le membre gauche de l'inégalité à montrer une borne supérieure. La propriété que nous voulons montrer s'écrit de façon équivalente

$$\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - \sup(B)$$

Pour montrer l'inégalité sous cette forme, il nous faut majorer A. Soit $a \in A$, et $b \in B$, écrivons

$$a = (a + b) - b$$

Comme $(a + b) \in A + B$, $(a + b) \leqslant \sup(A + B)$ d'où $a \leqslant \sup(A + B) - b$ et par passage à la borne supérieure,

$$\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - b$$

L'inégalité précédente est valable pour tout élément $b \in B$, donc

$$\forall b \in B, \quad b \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$$

ce qui montre que $\sup(A + B) - \sup(A)$ est un majorant de B. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que

$$\sup(B) \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$$

c'est à dire $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B)$.

Exercice 3.7 ♡

Reprendre l'exemple 3.16 page 1202 et montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

On dispose d'une technique similaire pour *minorer* une borne inférieure :

PLAN 3.3 : **Passage à la borne inférieure**

On veut montrer que $\alpha \leqslant \inf A$.

1. *Soit* $x \in A$, $\alpha \leqslant x$ *donc* α *est un minorant de la partie* A.
2. *Puisque* $\inf A$ *est le plus grand des minorants de* A, *il vient que* $\alpha \leqslant \inf A$.

Exemple 3.18 On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Pour un réel $x \in \mathbb{R}$, on définit la *distance* de x à la partie A par :

$$d(x,A) = \inf\{|x-a| \mid a \in A\}.$$

– Vérifions que $d(x,A)$ est bien défini. Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie $X = \{|x-a| \mid a \in A\}$ de telle façon que $d(x,A) = \inf X$. Puisque $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$ et alors $r = |x-a| \in X$ ce qui montre que la partie X est non vide. Puisque $\forall a \in A$, $|x-a| \geqslant 0$, la partie X est minorée par 0. La partie X possède donc une borne inférieure.
– Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|.$$

Il s'agit de montrer deux inégalités.
– Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|.$$

Écrivons l'inégalité à montrer en isolant à droite une borne inférieure :

$$d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A).$$

Soit $a \in A$. En utilisant la minoration de l'inégalité triangulaire,

$$|x-a| - |x-y| \leqslant |(x-a)-(x-y)| = |y-a|.$$

Mais $d(x,A) \leqslant |x-a|$ et donc

$$d(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a|.$$

Le réel $d(x,A) - |x-y|$ ne dépend plus de a et il est un minorant de l'ensemble $Y = \{|y-a| \mid a \in A\}$. Puisque $d(y,A)$ est le plus grand minorant de Y, il vient que

$$d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A).$$

– Pour montrer que $d(y,A) - d(x,A) \leqslant |x-y|$, il suffit de faire le même raisonnement en échangeant les rôles de x et y.

On utilise très souvent en analyse les notations suivantes :

DÉFINITION 3.1 **Borne supérieure d'une fonction**
Soit une fonction définie sur un partie $A \subset \mathbb{R}$: $f : A \mapsto \mathbb{R}$. On note lorsque ces bornes existent,

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(a) \mid a \in A\} \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf\{f(a) \mid a \in A\}.$$

Exemple 3.19 Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante. Comparer $\sup f(A)$ et $f(\sup A)$.
– Montrons que $\sup f(A) \leqslant f(\sup A)$. Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$ et que $\sup A$ est un majorant de A, $x \leqslant \sup A$. Comme la fonction f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(\sup A)$. Le réel $f(\sup A)$ est un majorant de la partie $f(A)$ et par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité annoncée.
– L'autre inégalité est fausse en général comme le montre le contre-exemple suivant. On note $A =]-\infty, 0[$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Alors $\sup(A) = 0$, $f(\sup A) = 1$ alors que $f(A) = \{0\}$ et $\sup f(A) = 0$ et donc $\sup f(A) < f(\sup A)$.

Si une fonction f est continue sur un segment $[a,b]$, le théorème 11.48 page 437 affirme qu'elle est bornée. Par conséquent l'ensemble $X = \{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$ est non vide (car $|f(a)| \in X$) et majoré. Il possède une borne supérieure et on note

$$\|f\|_\infty = \sup X = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Exemple 3.20 Soient $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un segment. Montrons que

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

En notant pour une fonction $h : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ $X_h = \{|h(x)| \mid x \in [a,b]\}$, il s'agit de montrer que $\sup X_{f+g} \leqslant \sup X_f + \sup X_g$. Utilisons le raisonnement de passage à la borne supérieure. Soit $t \in X_{f+g}$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $t = |(f+g)(x)| =$

$|f(x)+g(x)|$. Avec l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup X_f + \sup X_g.$$

Le réel $X_f + X_g$ est donc un majorant de la partie X_{f+g} et par passage à la borne supérieure, $\sup X_{f+g} \leqslant \sup X_f + X_g$ ce qui prouve la propriété.
Soit maintenant un réel λ. Montrons que

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

Avec les notations précédentes, il nous faut montrer que $\sup X_{\lambda f} = |\lambda| \sup X_f$. Procédons par double inégalité.

1. Montrons que
$$\sup X_{\lambda f} \leqslant |\lambda| \sup X_f$$
Soit $t \in X_{\lambda f}$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $t = |\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \leqslant |\lambda| \sup X_f$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité voulue.
2. Montrons que
$$|\lambda| \sup X_f \leqslant \sup X_{\lambda f}.$$
Le membre gauche à majorer n'est pas une borne supérieure. Écrivons l'inégalité en isolant une borne supérieure. Si $\lambda = 0$, le résultat est clair. Si $\lambda \neq 0$, il nous faut montrer que
$$\sup X_f \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sup X_{\lambda f}.$$
Soit $t \in X_f$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $t = |f(x)| = \dfrac{1}{|\lambda|} |\lambda f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} \sup X_{\lambda f}$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité souhaitée.

C.4 Équivalents

Dans ce paragraphe, nous allons voir la *pratique* des équivalents et des développements limités. Les équivalents sont un outil très puissant en analyse, indispensables dans plusieurs chapitres du cours de math. spé. et agréables à utiliser une fois que l'on a compris certains points. À utiliser sans modération !

C.4.1 Qu'est-ce qu'un équivalent simple ?

On parle d'équivalents de *suites* (au voisinage de $+\infty$) et de *fonctions* (au voisinage d'un point a éventuellement infini). Les techniques utilisées sont tout à fait similaires.
Il y a plusieurs façons de traduire que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:

1. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang).
2. il existe une suite (ε_n) telle que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$
3. la *définition de suites équivalentes* (valable même si les suites s'annulent une infinité de fois) :
$$u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n = o(v_n).$$

Pour deux fonctions f, g définies sur un voisinage d'un point a , elles sont équivalentes au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ (lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a)
2. Il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que :
$$\forall x \in V,\ f(x) = g(x)\,(1+\varepsilon(x)) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
3. La *définition* : $f(x) = g(x) + h(x)$ où $h(x) = o(g(x))$ au voisinage de a.

Il est nécessaire de bien réfléchir à ces définitions et de ne pas les confondre avec d'autres propriétés :

Exemple 3.21

1. Si $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas nécessairement équivalentes. Par exemple $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, la suite $w_n = -\frac{1}{n^2}$ converge vers 0 et pourtant (u_n) et (v_n) ne sont pas équivalentes.
2. Les suites $u_n = e^{n^2+n}$ et $v_n = e^{n^2}$ ne sont pas équivalentes (former le quotient !).
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: cette propriété est fausse en général. Par exemple, $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$ donne un contre-exemple.

On utilise les équivalents en pratique pour *simplifier* l'expression d'une suite ou d'une fonction en vue de :
– calculer sa limite,
– déterminer son signe à partir d'un certain rang,
– en deuxième année, déterminer la nature de la série $\sum u_n$,
– en deuxième année, voir si la fonction f est intégrable sur un intervalle
– ...
Qu'entend-t-on par un *équivalent simple* d'une suite u_n ? C'est une suite v_n équivalente à u_n formée uniquement de *produits-quotients* de suites de références. Quelques exemples de suites de référence : n^α, k^n, $n!$, $n^\alpha(\ln n)^\beta$, n^{n^2}, ...
Il existe une infinité de suites équivalentes à une suite donnée :

$$n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 + \sin(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2\ln n + 1/\ln n} \dots$$

mais parmi ces suites, il y en a une de référence (ici n^2) qu'on appellera *équivalent simple*. Remarquons qu'un équivalent simple ne fait intervenir *aucune somme*, uniquement des *produits-quotients*. Voici quelques exemples d'équivalents simples :

$$n\sin(n), \quad n^3\ln(n), \quad n^{n!}, \quad \ln(n)^2 e^{3n}, \quad e^{n^2}e^n, \quad \ln(\sin(n^2)), \dots$$

Par contre les expressions suivantes ne sont pas des équivalents simples :
– $v_n = n^2 + n$ car $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^2}$
– $v_n = \ln(n^3)$ car $\ln(n^3) = \boxed{3\ln n}$
– $v_n = e^{n^2+n+1/n}$ car $v_n = e^{n^2}e^n e^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{e^{n^2}e^n}$.
Pour déterminer un équivalent d'une suite composée $u_n = f(v_n)$, il est indispensable de déterminer la limite de (v_n). Une erreur grossière courante consiste à écrire $\sin(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors que la suite (v_n) ne converge pas vers 0. En pratique, lorsque la suite (v_n) est compliquée, on commence par chercher un équivalent simple de (v_n) qui permet d'une part de trouver la limite de (v_n) et d'autre part de simplifier l'équivalent de (u_n) ensuite.

Exemple 3.22

$$u_n = \tan\left(\underbrace{\frac{\sin(e^{-n})}{\operatorname{sh}\left(\frac{n}{e^n\ln n}\right)}}_{v_n}\right).$$

Puisque $e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$. Puisque $\frac{n}{e^n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\operatorname{sh}\left(\frac{n}{e^n\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e^n\ln n}$ et donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut utiliser l'équivalent usuel de tan en 0 et finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Exemple 3.23

$$u_n = \ln(\cos\frac{1}{n})$$

Ici $\cos(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on connaît un équivalent de $\ln(\theta_n)$ lorsque $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sous la forme $\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit d'écrire $u_n = \ln(1+v_n)$ où $v_n = \cos(1/n) - 1$ et puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

C.4.2 Suppression des sommes

Puisqu'un équivalent simple n'est formé que de produits-quotients, il faut savoir faire disparaître toutes les sommes dans la recherche d'équivalents. Supposons qu'une suite (u_n) s'écrive comme somme de deux suites : $u_n = v_n + w_n$.

Remarque 3.3 **On ne peut pas sommer les équivalents !** Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, on n'a pas toujours $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n + b_n$. Par exemple : $v_n = n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n = n^2 + 1/n$, $w_n = -n^2 + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2$. On a $u_n = v_n + w_n = n + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et pourtant $a_n + b_n = 2/n$ …

Deux cas se rencontrent souvent en pratique.

L'une des suites est négligeable devant l'autre

Si par exemple $w_n = o(v_n)$, alors $u_n = v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. *C'est la définition même d'un équivalent.*

Exemple 3.24 $u_n = n^2 + \frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. En effet, $w_n = \dfrac{\sin n}{n} = o(n^2) = v_n$ car $\dfrac{w_n}{v_n} = \dfrac{\sin n}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple 3.25

$$u_n = \frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + \frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\ln(\ln n^7)}{\sqrt{n}}$$

Commençons par utiliser les propriétés du logarithme pour écrire

$$\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}, \quad \ln(\ln n^7) = \ln(7\ln n) = \ln 7 + \ln(\ln n)$$

Il est indispensable ensuite de *classer les suites par ordre décroissant d'importance* :

$$u_n = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + 2\frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}} + \frac{\ln 7}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

En effet, $\ln(\ln n) = o(\ln n)$ puisque $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a également $\dfrac{7}{\sqrt{n}} = o(\ln n/\sqrt{n})$ et $\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}} = o(1/\sqrt{n})$. Les trois dernières suites sont donc négligeables devant $\dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}}$ et on en déduit l'équivalent simple :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}.$$

En pratique, on commence par chercher un équivalent simple de chacune des suites (v_n) et (w_n) ce qui permet de les comparer plus facilement.

Exemple 3.26

$$u_n = \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} - \cos\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Pour utiliser les équivalents usuels, écrivons

$$u_n = \underbrace{\left(\sqrt{1 + \sin\frac{\ln n}{n^2}} - 1\right)}_{v_n} + \underbrace{\left(1 - \cos\frac{\ln n}{n}\right)}_{w_n}$$

avec $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{2n^2} = a_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2n^2} = b_n$. Puisque $a_n = o(b_n)$, $v_n = o(w_n)$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2n^2}$.

Les deux suites ont le même ordre de grandeur

On suppose encore que $u_n = v_n + w_n$ et on commence toujours par chercher un équivalent plus simple de v_n et w_n : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Ici, on n'a ni $a_n = o(b_n)$, ni $b_n = o(a_n)$. Bien qu'on ne puisse pas sommer les équivalents, *si la somme n'est pas nulle*, on devine l'équivalent de u_n. Il ne reste qu'à le démontrer en utilisant les définitions.

Exemple 3.27

$$u_n = e^{\frac{1}{2^n}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^n}} - 2$$

Pour utiliser les équivalents usuels, écrivons :

$$u_n = \underbrace{\left(e^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)}_{v_n} + \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{2^n}} - 1\right)}_{w_n}.$$

Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} = a_n$ et que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = b_n$, en utilisant la définition des équivalents,

$$v_n = \frac{1}{2^n} + o(\frac{1}{2^n}) \quad w_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + o(\frac{1}{2^n})$$

d'où

$$u_n = \frac{3}{2}\frac{1}{2^n} + o(\frac{1}{2^n})$$

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\frac{1}{2^n}$.

Lorsque la somme des équivalents simples a_n et b_n est nulle, utiliser les développements limités (voir paragraphe suivant).

C.4.3 Utilisation des propriétés fonctionnelles

On connaît nos équivalents classiques sous la forme $u_n = f(v_n)$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $f(v(x))$ avec $v(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Que se passe-t-il lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 0$?

Logarithmes

On connaît un équivalent usuel de $\ln(v_n)$ lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sous la forme $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in]0,+\infty[$, il suffit d'utiliser la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ en écrivant :

$$\ln(v_n) = \ln\left(l \times \frac{v_n}{l}\right) = \ln l + \ln\left(\frac{v_n}{l}\right) \text{ avec } \frac{v_n}{l} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et on peut utiliser l'équivalent classique.

Exemple 3.28

$$u_n = \ln\left(1+\frac{n^2}{n^2+1}\right) - \ln 2$$

Puisque $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$, on ne peut pas utiliser l'équivalent classique $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$. Écrivons plutôt :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\frac{2n^2+1}{2(n^2+1)} \\ &= \ln\left(1+\left[\frac{2n^2-1}{2(n^2+1)} - 1\right]\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{3}{2(n^2+1)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n^2}. \end{aligned}$$

Remarque 3.4 **Attention à ne pas prendre de logarithmes d'équivalents !** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on n'a pas toujours $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Par exemple si $u_n = 1+1/n$ et $v_n = 1+1/n^2$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et pourtant $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$ alors que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$.
Il est intéressant d'examiner d'où vient le problème. Traduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ par $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln(1+\varepsilon_n)$ donc

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln v_n}$$

Il y a un problème lorsque $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est à dire lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ comme dans l'exemple ci-dessus.
Par contre, lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 1$ (même 0 ou $+\infty$), on s'aperçoit qu'on a le droit de prendre les logarithmes des équivalents.
Pour éviter d'écrire des bêtises, il vaut mieux retenir qu'on ne peut pas prendre le logarithme d'équivalents et refaire au cas par cas la preuve précédente lorsque nécessaire.

Exemple 3.29 Déterminer un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $f(x) = \operatorname{argsh}(x)$. On connaît la forme logarithmique (voir l'exemple 2.10 page 1169) :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Puisque $x + \sqrt{x^2+1} = 2x + o(x)$,

$$f(x) = \ln(2x(1+\varepsilon(x))) = \ln x + \ln 2 + \ln(1+\varepsilon(x)) = \ln x + o(\ln x)$$

et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

Lorsqu'on veut trouver un équivalent de $f(x) = \ln[u(x) + v(x)]$ avec $v(x) = o(u(x))$, factoriser à l'intérieur du logarithme le terme dominant :

$$f(x) = \ln[u(x)(1 + v(x)/a(x))] = \ln u(x) + \ln(1 + v(x)/u(x)) \sim \ln u(x)$$

puisque $v(x)/u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, $\ln(1 + v(x)/u(x)) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Exemple 3.30 Déterminer un équivalent de $f(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$ lorsque $x \to +\infty$. Écrivons

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{2}\left[1 + e^{-2x}\right]\right) = \ln e^x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

Exponentielles

On connaît un équivalent classique $(e^{\varepsilon_n} - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$ lorsque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Lorsque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 0$, il suffit d'utiliser la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ en écrivant

$$e^{\varepsilon_n} = e^l \times e^{(\varepsilon_n - l)}$$

Exemple 3.31

$$u_n = e^{\frac{n^2}{n^2+1}} - e^{\frac{n^3}{n^3+1}}$$

Comme $\frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ainsi que $\frac{n^3}{n^3+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, écrivons

$$\begin{aligned} u_n &= e \times e^{(\frac{n^2}{n^2+1} - 1)} - e \times e^{(\frac{n^3}{n^3+1} - 1)} \\ &= e\left[\left(e^{-\frac{1}{n^2+1}} - 1\right) - \left(e^{-\frac{1}{n^3+1}} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Mais comme $\left(e^{-\frac{1}{n^2+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n^3$ et que $\left(e^{-\frac{1}{n^3+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n^2 = o(1/n^2)$, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{n^2}$.

Remarque 3.5 **On ne peut pas prendre d'exponentielle d'équivalents :** si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on n'a pas toujours $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$. Par exemple si $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$, e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2}.
Regardons ce qui se passe :

$$\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n}$$

donc $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui n'est pas la même chose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$!

Fonctions puissances

On connaît un équivalent classique de $[(v_n)^\alpha - 1]$ lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sous la forme $[(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\varepsilon_n$ lorsque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 1$, on se ramène au cas précédent en écrivant :

$$\left[(v_n)^\alpha - l^\alpha\right] = l^\alpha\left[\left(\frac{v_n}{l}\right)^\alpha - 1\right]$$

avec $v_n/l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exemple 3.32

$$u_n = \sqrt{\frac{4n+1}{n+1}} - \sqrt[3]{\frac{8n}{n+1}}$$

Écrivons :

$$\begin{aligned} u_n &= 2\left[\left(\sqrt{1+\left(\frac{n+1/4}{n+1}-1\right)}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1+\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}-1\right)\right] \\ &= 2\left[\left(\sqrt{1-\frac{3}{4(n+1)}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n+1}}-1\right)\right] \\ &= 2(a_n - b_n) \end{aligned}$$

et comme $a_n = -3/(8n) + o(1/n)$, $b_n = -1/(3n) + o(1/n)$, on trouve que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{24n}$.

Quantités conjuguées

Une identité basique très utile pour manipuler des différences de racines carrées (multiplication par les quantités conjuguées) :

♡ **3.10**

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Elle provient simplement de la formule $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Exemple 3.33 Trouver un équivalent de $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

$$u_n = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

C.4.4 Mise sous forme exponentielle

Pour étudier un équivalent d'une suite $u_n = a_n^{b_n}$ où l'exposant dépend de n, utiliser la forme exponentielle :

♡ **3.11**

$$a^b = e^{b\ lna}$$

Exemple 3.34 Cherchons un équivalent de $f(x) = x^x - 1$ lorsque $x \to 0$:

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$$

puisque $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Exemple 3.35 3 **Un exemple fondamental :** Soit $x \in \mathbb{R}$, étudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Une erreur fréquente consiste à dire que lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. C'est une forme indéterminée $\boxed{1^\infty}$. En effet, $v_n^n = e^{n\ln v_n}$ et on voit que si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il y a une forme indéterminée $\infty \times 0$ dans l'exposant.
Écrivons plutôt

$$u_n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} = e^{v_n}$$

et cherchons la limite de la suite (v_n). Comme $x/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, avec l'équivalent du logarithme, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{x}{n} = x$ et donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et par composée de limites, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.

Remarque 3.6 La forme exponentielle n'est utile que si l'exposant dépend de la variable. N'en abusez pas. Il serait ridicule d'écrire $(n^2+1)^2 = e^{2\ln(n^2+1)}$ pour trouver un équivalent de cette suite !

C.4.5 Utilisation des développements limités

Les équivalents sont l'outil principal pour obtenir le comportement d'une fonction au voisinage d'un point et sont à utiliser en priorité. Dans certains cas, l'utilisation des développements limités est plus simple, voire nécessaire. Dans ce paragraphe, nous allons voir comment calculer et utiliser les développements limités.
Rappelons que Maple permet d'obtenir des développements limités :

MAPLE

```
 f := sin(x)^3 * tan(x);
                                    3
                          f := sin(x)  tan(x)
> series(f, x = 0, 10);

                       4        6         8      10
                      x  - 1/6 x  + 3/40 x  + O(x  )
```

Attention, si l'on veut un DL à l'ordre n avec un reste en $o(x^n)$, il faut demander à Maple l'ordre $(n+1)$ (Maple donne les restes en $O(x^n)$).

Prévoir les ordres des DL

Lorsqu'on veut obtenir un développement limité d'un produit à l'ordre n, il faut faire un développement limité de chaque terme à l'ordre n et ne garder que les termes de degré inférieur à n dans le produit des parties principales. Si dans un des deux termes, le développement limité commence par x^k avec $k \geqslant 1$, on peut économiser des calculs.

Exemple 3.36 Calculer le développement limité de $f(x) = \tan x \times \sin^2 x$ à l'ordre 5. Nous pouvons utiliser que le développement de $\sin x$ et $\tan x$ commence par x (pas de termes constants) en écrivant $\sin^2 x = x^2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ et $\tan x = x\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$. Alors

$$f(x) = x^3\left[\frac{\sin x}{x}\right]^2\left[\frac{\tan x}{x}\right].$$

On voit que comme x^3 est en facteur, il suffit d'obtenir un DL de $(\sin x/x)^2$ et de $\tan x/x$ à l'ordre 2 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3) \quad \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Et en effectuant le produit des DL,

$$f(x) = x^3\left[1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right]\left[1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right] = x^3\left[1 + 0x^2 + o(x^2)\right] = x^3 + o(x^5).$$

Dans cet exemple, nous avons utilisé uniquement le DL de sin à l'ordre 3 et le DL de tan à l'ordre 3 (et non pas à l'ordre 5 comme on aurait pu le penser).

Plus généralement, si les développements limités de deux fonctions s'écrivent :

$$\begin{cases} f(x) &= a_k x^k + \dots \\ g(x) &= b_p x^p + \dots \end{cases}$$

il suffit d'écrire

$$f(x)g(x) = a_k b_k x^{k+p} \frac{f(x)}{x^k}\frac{g(x)}{x^p}$$

et pour obtenir un DL à l'ordre n de fg, il suffit de faire un DL à l'ordre $n-(k+p)$ de $f(x)/x^k$ et $g(x)/x^k$. Il suffit donc d'avoir le DL de f à l'ordre $n-p$ et celui de g à l'ordre $n-k$.

Exercice 3.8 ♡

Calculer le DL à l'ordre 13 *de* $f(x) = \mathrm{sh}^3(x)\ln^4(1+x^2)$.

Solution : *Comme* $\mathrm{sh}\, x = x + \ldots$ *et* $\ln(1+x^2) = x^2 - \ldots$, *écrivons*

$$f(x) = x^3 \times x^8 \left[\frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\right]^3 \left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]^4.$$

Il suffit d'avoir le DL des deux crochets à l'ordre 2 *:*

$$\frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad \left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\right)^3 = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^4 = 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

et finalement,

$$f(x) = x^{11}\left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\left[1 - 2x^2 + o(x^2)\right] = x^{11}\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right] = x^{11} - \frac{3}{2}x^{13} + o(x^{13}).$$

La même technique est valable pour les composées de DL. Pour calculer un DL à l'ordre n de $f(x) = g(h(x))$, d'après le cours, il nous faut un DL à l'ordre n de g et de h, effectuer la composée des parties régulières et ne conserver que les termes de degré inférieur à n. En pratique, on commence par regarder le premier terme du DL de h et en fonction de ce premier terme, on évalue les ordres nécessaires.

Exemple 3.37 Calculer le DL à l'ordre 4 de $f(x) = \mathrm{sh}(\sin^3 x)$. Puisque $\sin^3 x = x^3 + \ldots$, lorsqu'on effectue le DL de sh, $\mathrm{sh}(y) = y + \ldots$, en remplaçant y par la partie régulière de $\sin^3 x$, on s'aperçoit que le premier terme est déjà de degré 3. Les autres termes seront des $o(x^4)$ car $(x^3)^2 = x^6 = o(x^4)$ (on peut utiliser également que la fonction f est impaire, donc que le coefficient de x^4 est nul). Il suffit finalement d'utiliser le DL de sin et sh à l'ordre 1 :

$$f(x) = \mathrm{sh}(x^3 + o(x^3)) = x^3 + o(x^4).$$

DL et équivalents

Un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point permet de trouver un équivalent. Si au voisinage de zéro,

$$f(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + o(x^n)$$

avec $a_k \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_k x^k$.

Exemple 3.38 Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 1$ de $f(x) = x^x - x$. Commençons par faire un changement de variables pour se ramener à chercher un équivalent en 0. On pose $h = x - 1$ et on définit la fonction auxiliaire $g(h) = f(1+h) = (1+h)^{1+h} - 1 - h$. On se ramène à chercher un équivalent de g lorsque $h \to 0$. Sous forme exponentielle,

$$g(h) = [e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1] - h.$$

Avec l' équivalent usuel, $(e^u - 1) \underset{u\to 0}{\sim} u$, puisque $(1+h)\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h \to 0$, $e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} h$. On est dans le cas où la somme formelle des équivalents est nulle. La méthode du paragraphe précédent ne s'applique pas. C'est typiquement le cas où l'on utilise les développements limités. Nous avons utilisé le DL de $\ln(1+h)$ à l'ordre 1, poussons le DL à l'ordre supérieur :

$$g(h) = e^{(1+h)(h-h^2/2+o(h^2))} - 1 - h = e^{h+h^2/2+o(h^2)} - 1 - h = 1 + (h + h^2/2) + h^2/2 + o(h^2) - 1 - h = h^2 + o(h^2).$$

Par conséquent, $g(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2$ et donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^2$

Exemple 3.39 Déterminer un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{\pi x + 1}{2x + 1}$. On commence toujours par étudier la limite de la fonction (si $f(x) \to l \neq 0$, alors $f(x) \sim l$!). Ici $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et il faut travailler un peu plus. On

cherche un équivalent de chaque terme de la somme : puisque $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi/2$ et $\frac{\pi x+1}{2x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi/2$, on est dans le cas où la somme des équivalents est nulle et on ne peut pas conclure. Utilisons alors les développements limités. Faisons le changement de variables $h = 1/x$ pour se ramener à nos DL en 0 : on définit la fonction $g(h) = f(1/h)$:

$$g(h) = \arctan(1/h) - \frac{\pi+h}{2+h} = \frac{\pi}{2} - \arctan h - \frac{\pi}{2}\frac{1+h/\pi}{1+h/2}.$$

On a utilisé que $\arctan(h) + \arctan(1/h) = \pi/2$ pour $h > 0$. Alors

$$g(h) = \frac{\pi}{2} - (h + o(h)) - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) = \frac{\pi-6}{4}h + o(h).$$

On en déduit que $g(h) \underset{h\to0}{\sim} \frac{\pi-6}{4}h$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi-6}{4x}$.

Recherche de limites

Les développements limités sont un outil important, mais nécessitent des calculs souvent pénibles. Par exemple, pour trouver le développement limité d'un produit de fonctions, il faut effectuer un produit de polynômes (utiliser la méthode vue en B.4.2 page 1170). Si l'on veut uniquement trouver la limite d'une fonction qui s'écrit comme produits-quotients, il serait maladroit de calculer un développement limité : il est préférable d'utiliser les équivalents (on peut faire des produits et quotients d'équivalents).
On veut trouver la limite d'une fonction f qui s'écrit comme produit de fonctions f_i lorsque $x \to a$. Voici la démarche typique à suivre :

1. On étudie la limite de chaque fonction f_i et on regarde si la limite de f est évidente.
2. S'il y a des formes indéterminées, on cherche un équivalent de chaque terme f_i du produit. Si $a \neq 0$, on se ramène à des équivalents en zéro avec le changement de variables $h = (x - a)$ ou $h = (a - x)$ (ou $h = 1/x$ lorsque $a = \pm\infty$). On se ramène à chercher des équivalents en 0 de fonctions g_i.
3. Si la fonction g_i est une *somme* de fonctions, et si les sommes d'équivalents sont nulles, utiliser les développements limités pour trouver un équivalent de g_i.
4. On peut faire des produits d'équivalents et on trouve un équivalent de f qui permet de trouver la limite.

Exemple 3.40 Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{1}{x^4}\left(e^{x^2} - \cos x\right)\left[(1+x)^x - 1\right]$$

Il y a plusieurs formes indéterminées dans cette limite. Cherchons un équivalent de chaque facteur :

$$f_1(x) = e^{x^2} - \cos(x) = \left[1 + x^2 + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x\to0}{\sim} \frac{3}{2}x^2$$

$$f_2(x) = \left(e^{x\ln(1+x)} - 1\right) \underset{x\to0}{\sim} x^2$$

d'où $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x^4} \times \frac{3}{2}x^2 \times x^2 = \frac{3}{2}$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} \frac{3}{2}$.

Lorsque la fonction f s'écrit comme *quotient* de fonctions, $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, on commence par chercher un équivalent du *dénominateur*. Si par exemple, $d(x) \underset{x\to0}{\sim} b_k x^k$ avec $b_k \neq 0$ et qu'on doit utiliser un développement limité pour le numérateur, il suffira de faire un DL à l'ordre k pour conclure :

1. Si $n(x) = a_p x^p + \cdots + o(x^k)$ avec $p < k$ et $a_k \neq 0$, $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{a_p}{b_k x^{k-p}} \xrightarrow[x\to0]{} \pm\infty$.
2. Si $n(x) = a_k x^k + o(x^k)$ avec $a_k \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{a_k}{b_k}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} a_k/b_k$.
3. Si $n(x) = o(x^k)$, alors $f(x) = o(1)$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

Exemple 3.41 Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x(1-\cos(3x))}$. Commençons par chercher un équivalent du dénominateur : $d(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \times \dfrac{9x^2}{2} = \dfrac{9}{2}x^3$. Pour obtenir la limite de f, il suffit de faire un DL du numérateur à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} n(x) &= e^{x-x^3/6+o(x^3)} - e^{x+x^3/3+o(x^3)} \\ &= [1 + (x - x^3/6) + \frac{1}{2}(x-x^3/6)^2 + \frac{1}{6}(x-x^3/6)^3 + o(x^3)] \\ &\quad - [1 + (x + x^3/3) + \frac{1}{2}(x+x^3/3)^2 + \frac{1}{6}(x+x^3/3)^3 + o(x^3)] \\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

D'où $n(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^3/2$ et en prenant les quotients d'équivalents, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1/9$ puis $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/9$.

C.4.6 Étude locale d'une fonction

On se sert souvent des développements limités pour étudier le prolongement d'une fonction en un point. Si une fonction f est continue sur $]0, a]$ et qu'elle possède un développement limité en 0 à l'ordre 1 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

alors :

1. $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0$ donc la fonction f se prolonge en une fonction

$$\tilde{f} : \begin{cases} [0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

   qui est continue sur $[0, a]$.

2. De plus, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$$

   ce qui montre que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et que $\tilde{f}'(0) = a_1$.

Remarque 3.7 Une fonction $f :]0, a] \mapsto \mathbb{R}$ peut admettre un développement limité à un ordre $n \geqslant 2$ sans qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, a]$. Étudiez attentivement le contre-exemple classique suivant ($n \geqslant 2$) :

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{n+1}\sin(1/x^n) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

– Puisque $\left|x^{n+1}\sin(1/x^n)\right| \leqslant x^{n+1}$, $f(x) = o(x^n)$ et donc f admet un DL à l'ordre n en 0 ($a_0 = \cdots = a_n = 0$).
– La fonction f est donc continue et dérivable en 0 (puisqu'elle admet un DL(0,1)).
– Calculons pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = (n+1)x^n \sin\frac{1}{x^n} - n\cos\frac{1}{x^n}$$

On voit que f' n'admet pas de limite en 0 (considérer par exemple les suites $x_n = (2n\pi)^{-1/n}$ et $y_n = (2n\pi + \pi/2)^{-1/n}$). La fonction f' n'est donc pas continue en 0 (et à fortiori n'est pas dérivable en 0). La fonction f est donc dérivable sur $[0, 1]$ mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.

Exemple 3.42 2 Montrer que la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable (et continue) en tout point $x \neq 0$. Étudions ce qui se passe en 0. Effectuons un DL de f en 0 à l'ordre 1 : pour $t \neq 0$,

$$f(t) = \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}\right] = \frac{1}{t}\left[1 - (1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2))\right] = -\frac{t}{6} + o(t).$$

On en déduit que $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} a_0 = 0 = f(0)$ donc que f est continue en 0. De plus, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = 1/6$. Le DL que nous avons fait ne suffit pas à conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (voir le contre-exemple ci-dessus). Il nous faut étudier la continuité de la fonction dérivée :

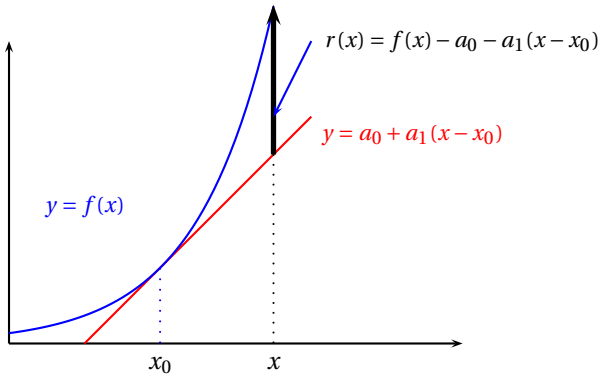
$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{t^2\cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1/6 & \text{si } t = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Cherchons la limite de f' lorsque $t \to 0$ en utilisant les équivalents : on a un équivalent immédiat du dénominateur : $d(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^4$. Il suffit de faire un DL à l'ordre 4 du numérateur pour conclure :

$$n(t) = t^2(1 - t^2/2 + o(t^2)) - t^2(1 - t^2/6 + o(t^2)) = -t^4/6 + o(t^4) \underset{t\to 0}{\sim} -t^4/6$$

d'où $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1/6 = f'(0)$. La fonction f' étant continue, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Un développement limité à un ordre supérieur à 2 permet de préciser l'allure locale de la courbe $y = f(x)$. Si au voisinage de x_0, $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, la fonction f est dérivable en x_0 et l'équation de la tangente en x_0 s'écrit $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. La quantité $r(x) = f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ représente la mesure algébrique entre la courbe et la tangente :



Puisque $r(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_k(x - x_0)^k$ ($a_k \neq 0$), on obtient sur un voisinage de x_0, le signe de $r(x)$ et donc la position locale de la courbe par rapport à sa tangente (elle dépend du signe de a_k et de la parité de k).

Exemple 3.43 Pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{1}{x}$, on effectue un DL à l'ordre 5 du sinus pour trouver que

$$f(x) = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{5!} + o(x^3).$$

On en déduit que f est dérivable en 0, que l'équation de la tangente au point $(0,0)$ s'écrit $y = -x/6$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que la courbe se situe au-dessus de la tangente pour $x \in]0,\alpha[$ et au-dessous pour $x \in]-\alpha, 0[$.

C.4.7 Développements asymptotiques

Revenons sur la définition d'un développement limité au voisinage de zéro : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + o(x^k)$. La fonction f s'écrit comme un polynôme (la partie régulière du DL) et un reste $r(x) = x^k \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Nous pouvons écrire par exemple :

$$e^{x \ln x} = 1 + x\ln x + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} + o(x^2 \ln^2 x).$$

En effet, il suffit d'utiliser le fait qu'un développement limité *est une égalité* : $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^2\varepsilon(u)$ et on peut remplacer u par $x\ln x$:

$$e^{x\ln x} = x\ln x + \frac{x^2\ln^2 x}{2} + x^2\ln^2 x\varepsilon(x\ln x).$$

Mais puisque $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et que $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{}$, par composée de limites, $\varepsilon(x\ln x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et donc $x^2\ln^2 x\varepsilon(x\ln x) = o(x^2\ln^2 x)$.

Exemple 3.44 Cherchons un équivalent lorsque $x \to 0$ de $f(x) = x^x - 1 - x\ln x$. Écrivons $f(x) = e^{x\ln x} - 1 - x\ln x = \left[1 + x\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2} + o(x^2\ln^2 x)\right] - 1 - x\ln x = \frac{x^2\ln^2 x}{2} + o(x^2\ln^2 x)$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2\ln^2 x}{2}$.

Exemple 3.45 Cherchons un équivalent lorsque $x \to 0$ de $f(x) = (\tan x)^x - x^x$. Écrivons en utilisant le DL(0,3) de tan :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x\ln[x+x^3/3+o(x^3)]} - e^{x\ln x} \\ &= e^{x(\ln x+\ln(1+x^2/3+o(x^2)))} - e^{x\ln x} \\ &= e^{x\ln x}\left[e^{x\ln(1+x^2/3+o(x^2))} - 1\right] \\ &= e^{x\ln x}\left[\frac{x^3}{3} + o(x^2)\right] \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

en effet, puisque $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $e^{x\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Exemple 3.46

On appelle *développement asymptotique* d'une fonction f au voisinage d'un point a, une égalité :

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_k(x) + r(x)$$

où les fonctions f_i sont ordonnées par ordre décroissant d'importance au voisinage du point a : $f_1(x) = o(f_0(x))$, $f_2(x) = o(f_1(x))$ ...et $r(x) = o(f_k(x))$. Si de plus $r(x) = o(g(x))$, on dit qu'on a un développement asymptotique *à la précision* $g(x)$. Cette notion généralise les développements limités : un développement limité (au voisinage de a) est un développement asymptotique avec les fonctions $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = (x-a)$, $\ldots f_k(x) = (x-a)^k$.

Remarque 3.8 Un développement asymptotique donne un équivalent de f : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f_0(x)$.

Exemple 3.47 Trouver un développement asymptotique à la précision $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$ de

$$f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$$

Posons $h = 1/x$ et $g(h) = f(1/h)$. On se ramène à effectuer un développement asymptotique de g à la précision h^2 au voisinage de 0. Écrivons :

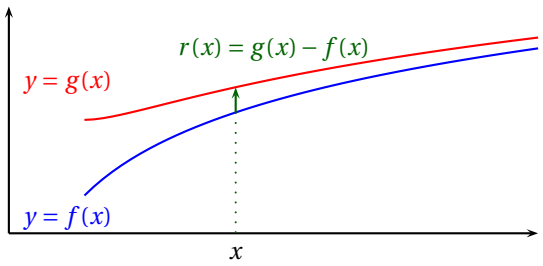
$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+h}{h}\right) + \frac{1+h}{h}\ln h \\ &= \frac{1}{h}\left[\ln(1+h) + h\ln h\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[h\ln h + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right] \\ &= \ln h + 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2) \end{aligned}$$

d'où au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o(1/x^2).$$

En particulier, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$.

Un développement asymptotique permet de trouver des asymptotes à une courbe. On dit que deux courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont asymptotes au voisinage de a lorsque $g(x) - f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.



Par exemple, pour déterminer une asymptote d'une courbe d'équation $y = f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, on peut effectuer un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. Si par exemple

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_k}{x^k} + o(1/x^k).$$

En posant $g(x) = a_0 x + a_1$, $r(x) = f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_k}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ($a_k \neq 0$) et on en déduit que la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote on détermine la position de la courbe par rapport à son asymptote à l'aide du signe de l'équivalent $\dfrac{a_k}{x^k}$.

Exemple 3.48 Si $f(x) = (x+2)e^{1/x}$, en posant $h = 1/x$,

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{1+2h}{h} e^h \\ &= \frac{1}{h}(1+2h)(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)) \\ &= \frac{1}{h} + 3 + \frac{5}{2}h + o(h) \end{aligned}$$

et on obtient un développement asymptotique de f lorsque $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = x + 3 + \frac{5}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote à la courbe $y = f(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$. De plus, puisque $f(x) - [x+3] \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{2x}$, sur un voisinage de $+\infty$, $f(x) - [x+3] \geqslant 0$ ce qui montre que la courbe est située au-dessus de son asymptote et sur un voisinage de $-\infty$, la courbe est située en-dessous de son asymptote.

Un développement asymptotique permet également de trouver des courbes asymptotes plus compliquées que les droites. On effectue en pratique un développement asymptotique avec le dernier terme significatif qui tend vers zéro.

Exemple 3.49 Étudier la branche infinie lorsque $x \to +\infty$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}}$. En posant $h = 1/x$,

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{1}{h^2} e^{\frac{h}{1-h^2}} \\ &= \frac{1}{h^2} e^{h+h^3+o(h^3)} \\ &= \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}h + o(h) \end{aligned}$$

d'où $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{6x} + o(\dfrac{1}{x})$. On en déduit que la parabole d'équation $y = x^2 + x + 1/2$ est asymptote à la courbe et que sur un voisinage de $+\infty$, la courbe est située au-dessus de cette parabole.

C.4.8 Exercices

Exercice 3.9 ♡♡♡

Déterminer un équivalent simple de

a. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+x}\right)$ *lorsque* $x\to+\infty$.

b. $f(x)=\sqrt{\operatorname{th} x}-1$ *lorsque* $x\to+\infty$.

c. $u_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}\right)$.

d. $u_n=\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt[3]{1+\tan^2(\frac{1}{2^n})}-\cos(\frac{1}{2^n})}$

e. $u_n=e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

f. $u_n=\sqrt{\cos(1/n)}-e^{\sin(1/n^2)}$.

g. $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$.

h. $f(x)=\ln(\operatorname{ch} x)-\operatorname{ch}(\ln x)$ *lorsque* $x\to+\infty$.

i. $u_n=\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$.

j. $u_n=\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

Solution :

a. $\frac{x^3+1}{x^3+x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$. *Écrivons donc* $f(x)=\ln\left(1+\frac{x^3+1}{x^3+x}-1\right)=\ln\left(1+\frac{-x+1}{x^3+x}\right)$. *Puisque* $\frac{-x+1}{x^3+x}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{x^2}$.

b. *Puisque* $\operatorname{th} x\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, *écrivons* $f(x)=\sqrt{1+(\operatorname{th} x-1)}-1$ *et cherchons un équivalent de* $v(x)=\operatorname{th} x-1=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-1=-2\dfrac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}-2e^{-2x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. *Par conséquent,* $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-e^{-2x}$.

c. *Su* $u_n=cos(v_n)$, *la suite* (v_n) *tend vers* $\pi/2$. *Utilisons la trigonométrie :* $u_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\left[1+\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right)\right]\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right)=-\frac{\pi}{2}\dfrac{-n+3}{n^2+n-2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2n}$.

d. $\alpha_n=\ln(n+1)-\ln(n)=\ln(1+1/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$. $\beta_n=\underbrace{\left[\left(1+\tan^2(1/2^n)\right)^{1/3}-1\right]}_{v_n}+\underbrace{\left[1-\cos(1/2^n)\right]}_{w_n}$. $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}$ *et* $w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\frac{1}{4^n}$ *d'où* $\beta_n=\frac{5}{6}\frac{1}{4^n}+o(1/2^n)$ *et donc* $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{6}{5}\frac{4^n}{n}$.

e. *Écrivons d'abord*

$$u_n=(e^{\theta_n}-1)+(1-\cos n^{-1/4})=a_n+b_n.$$

Puisque $\ln n=o(n)$, $\theta_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\ln n/n}\to 0$. *Avec l'équivalent classique de l'exponentielle,* $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\ln n/n}$. *Avec l'équivalent classique du cosinus,* $b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}1/(2\sqrt{n})$ *et comme* $b_n=o(a_n)$, *il vient que* $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}$.

f. *Pour utiliser les équivalents usuels, écrivons*

$$u_n=\left[\sqrt{1+(\cos 1/n-1)}-1\right]-\left[e^{\sin(1/n^2)}-1\right]=a_n+b_n.$$

On trouve que $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-1/2n^2$ *et* $b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}1/n^2$. *Donc avec la définition d'un équivalent,* $a_n=-1/2n^2+o(1/n^2)$ *et* $b_n=1/n^2+o(1/n^2)$ *et donc* $u_n=1/2n^2+o(1/n^2)$. *Finalement,* $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}1/2n^2$.

g. *En utilisant les quantités conjuguées, écrivons :*

$$u_n=\frac{2}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}=\frac{2}{v_nw_n}.$$

Ensuite, on cherche un équivalent de chaque partie du produit. Puisque $\sqrt{n^2+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}n$, $n+\sqrt{n^2+1}=2n+o(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}2n$. *Donc* $\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2n}$. *De même,* $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2n}$ *et ensuite* $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{2n}$. *On fait de même pour* w_n : $w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2n$ *et finalement,* $u_n\sim\dfrac{1}{4\sqrt{2}n^{3/2}}$.

h. *Utilisons la propriété du logarithme pour écrire* $\ln(\operatorname{ch} x)=\ln\left(\frac{e^x}{2}(1+e^{-2x})\right)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})=x+o(x)$ *et ensuite* $\operatorname{ch}(\ln x)=\frac{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}{2}=\frac{x-1/x}{2}=\frac{x}{2}+o(x)$. *Alors* $f(x)=\frac{3}{2}x+o(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{3}{2}x$.

i. *Sous forme exponentielle,*

$$u_n=e^{n\ln n\ln\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]}=e^{a_n}$$

et $a_n=n\ln n\ln\left[1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right]\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n\ln n}{n\ln n}=1$ *d'où* $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ *et donc* $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e$.

j. Sous forme exponentielle : $u_n = e^{n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{a_n}$ *Utilisons ensuite la formule de trigonométrie :*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{3}+\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}} \sim \sqrt{3}.$$

On n'a pas le droit de prendre l'exponentielle d'équivalents ! Formons toutefois le quotient :

$$\theta_n = \frac{u_n}{e^{n\ln\sqrt{3}}} = e^{n\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}}\right)} = e^{a_n}$$

avec

$$a_n = n\ln\left(1+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}}\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)$$

donc $\theta_n \to e^{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}$ *et donc*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n\ln\sqrt{3}+(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})} = e^{(\frac{4\sqrt{3}}{3})}(\sqrt{3})^n.$$

Exercice 3.10 ♡♡♡

Déterminer les limites :

a. $f(x) = \left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ *lorsque* $x \to 1$.

b. $f(x) = [\ln(1+e^{-x})]^{1/x}$ *lorsque* $x \to +\infty$.

c. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(x)}$ *lorsque* $x \to 0$.

d. $f(x) = \left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{x\ln x}$ *lorsque* $x \to +\infty$.

e. $f(x) = \dfrac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$ *lorsque* $x \to 1^+$.

f. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} - \dfrac{1}{\ln^2(1+x)}$ *lorsque* $x \to 0$.

g. $f(x) = \dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ *lorsque* $x \to 1$.

Solution :

a. Par le changement de variables $h = x-1$*, on se ramène à chercher la limite lorsque* $h \to 0$ *de*

$$g(h) = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h}{4}\right)^{-1/\tan(\pi h/2)} = \exp\left[-\frac{1}{\tan\frac{\pi h}{2}}\ln\left(1+\frac{2\tan\pi h/4}{1-\tan\pi h/4}\right)\right]$$

et avec les équivalents usuels, on trouve que la limite vaut $1/e$.

b. Sous forme exponentielle,

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(\ln(1+e^{-x}))}$$

Mais puisque $\ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$*, on peut écrire* $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x}\times\theta(x)$ *avec* $\theta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$*. Alors*

$$\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right) = -1 + \frac{\ln(\theta(x))}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1.$$

Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1/e$.

c. Si $f(x) = n(x)/d(x)$ *alors* $d(x) \underset{x\to0}{\sim} x^2$ *et* $n(x) = \ln(1-(1-\cos(3x))) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{9x^2}{2}$ *d'où finalement* $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} -9/4$.

d. Sous forme exponentielle, $f(x) = e^{x\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right]}$*. Avec l'équivalent classique du logarithme,* $\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$ *d'où* $x\ln x\ln(1+\ln(1+1/x)/\ln x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ *et finalement* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$.

e. Avec le changement de variables $h = x-1$, on se ramène à chercher la limite lorsque $h \to 0^+$ de

$$g(h) = \frac{(1+h)^{1+h} - 1 - h}{\ln(1+\sqrt{h(2+h)})}.$$

Puisque $d(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{2h}$, il suffit de faire un DL à l'ordre 1 du numérateur :

$$n(h) = e^{(1+h)(h+o(h))} - 1 - h = o(h)$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

f. Réduisons au même dénominateur $f(x) = \dfrac{\ln^2(1+x) - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x \ln^2(1+x)}$. Le dénominateur $d(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et il suffira de faire un DL du numérateur $r(x)$ à un ordre inférieur à 4 pour conclure. On trouve que $n(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^3$ et donc que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1/x$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$.

g. Avec le changement de variables $h = x-1$, on se ramène à chercher la limite lorsque $h \to 0$ de

$$g(h) = \frac{3(1-\sqrt[3]{1+h}) - 2(1-\sqrt{1+h})}{6(1-\sqrt{1+h})(1-\sqrt[3]{1+h})}.$$

Avec l'équivalent usuel $(1+h)^\alpha - 1 \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h$, on trouve un équivalent du dénominateur : $d(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2$. Il suffit de faire un DL à l'ordre 2 du numérateur :

$$n(h) = 3\left[1 - \left(1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + o(h^2)\right)\right] - 2\left[1 - \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right)\right] = \frac{h^2}{12} + o(h^2).$$

Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{12}$.

C.5 Étude de suites récurrentes, vitesse de convergence

C.5.1 Étude d'une suite récurrente

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques techniques pour étudier une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Nous allons citer quelques résultats hors programme dans le but de dégager quelques méthodes générales. Dans la pratique des exercices, n'utilisez pas ces théorèmes, mais rédigez des démonstrations (essentiellement des récurrences simples) pour retrouver ces résultats.

Une procédure Maple permet de calculer le n-ième terme d'une suite récurrente

MAPLE

```
terme := proc(f, u0, n)
  local u, i;
  u := u0;
  for i from 1 to n do
    u := f(u) #u = u_i
  od;
  u;  #u = u_n
end;

f := x -> x^2
terme(f, 2, 3);
```

On peut également calculer la liste des n premiers termes de la suite

MAPLE

```
listetermes := proc(f, u0, n)
  local u, i, l;
  u := u0;
  l := u0;
  for i from 1 to n do
    u := f(u);
    l := l, u;
  od;
  [l];
end;
```

DÉFINITION 3.2 **Intervalle stable**
On dit qu'un intervalle I est *stable* par la fonction f lorsque $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$.

PROPOSITION 3.2 **La suite récurrente reste dans un intervalle stable**
Si I est un intervalle stable par la fonction f et si $u_0 \in \mathrm{I}$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathrm{I}$.

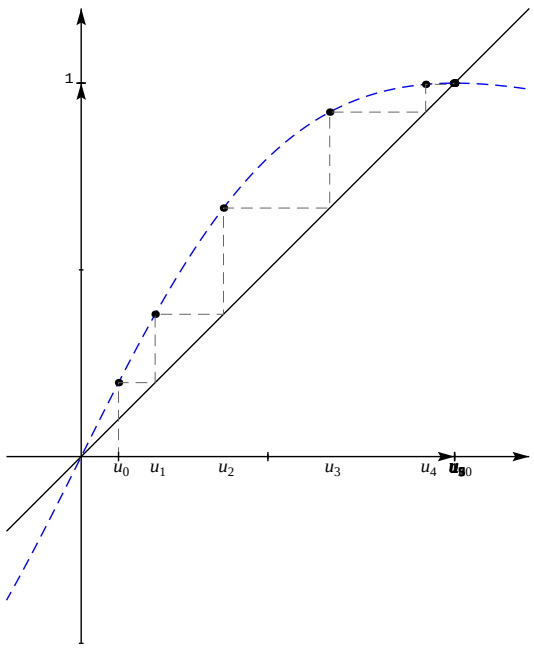
Démonstration *Par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a supposé que $u_0 \in \mathrm{I}$. Supposons la propriété vraie au rang n, $u_n \in \mathrm{I}$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et que* I *est stable par f, $f(u_n) \in \mathrm{I}$.*

Le résultat suivant est fondamental car il permet de trouver les limites éventuelles d'une suite récurrente.

PROPOSITION 3.3 ♡ **Limites possibles de (u_n)**
Si la suite (u_n) converge vers une limite finie l, et si la fonction f est *continue* au point l, alors l est un *point fixe* de la fonction f : $f(l) = l$.

Démonstration *Si (u_n) converge vers l, alors la suite extraite (u_{n+1}) converge vers la même limite l. De plus, d'après le théorème 11.22 page 426, comme la fonction f est continue au point l, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(l)$. Par unicité de la limite, on doit avoir $l = f(l)$.*

Les deux résultats précédents montrent qu'il est important d'étudier les intervalles stables par la fonction f et les points fixes de f. Un point fixe d'une fonction se lit facilement sur un dessin : il correspond à l'intersection du graphe de f avec la première bissectrice. Lors de l'étude d'une suite récurrente, on commencera donc par représenter sur le même dessin le graphe de la fonction et la première bissectrice. On peut ainsi deviner le comportement de la suite (u_n) en représentant les premiers termes de la suite par « ricochets »sur la première bissectrice.



Multimédia : Animation pour représenter l'évolution d'une suite récurrente avec des ricochets sur la première bissectrice

Le dessin permet également de visualiser les intervalles stables intéressants, en général limités par les points fixes de la fonction.

L'étude générale d'une suite récurrente peut être très compliquée, et une suite récurrente aussi simple que $u_0 \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda\, u_n(1-u_n)$ est un sujet de recherche récent ! Nous allons étudier uniquement le cas le plus simple où la fonction f est *monotone* sur un intervalle stable I.

PROPOSITION 3.4 **Cas où f est croissante sur un intervalle stable**
On suppose que la fonction f est *continue* et *croissante* sur un intervalle I *stable* et que $u_0 \in$ I.

1. Si $u_0 \leqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est croissante.
2. Si $u_0 \geqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est décroissante.

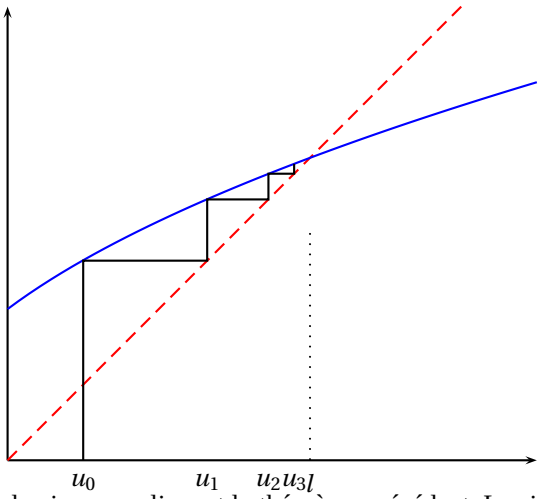
Démonstration *On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in$ I. Supposons par exemple que $u_0 \leqslant f(u_0)$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$. La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons-la vraie au rang n : $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque f est croissante sur* I, *$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.*

Remarque 3.9 Si de plus l'intervalle I est borné, alors la suite (u_n) converge en vertu du théorème de la limite monotone et sa limite ne peut être qu'un point fixe de f. Cela nous suffit en général pour conclure.

Exemple 3.50 Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}.$$

Introduisons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{4+3x} \end{array} \right.$. Elle est continue sur $[0,+\infty[$ et un point fixe $l \geqslant 0$ de f vérifie $l^2 = 4+3l$, c'est-à-dire $l = 4$.



On justifie ce que l'on voit sur le dessin en appliquant le théorème précédent. Les intervalles $I_1 = [0,4]$ et $I_2 = [4,+\infty[$ sont stables par la fonction continue f.

– Si $u_0 \in [0,4]$, puisque $u_0 \leqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est croissante. Puisqu'elle est majorée par 4, elle converge et ce ne peut être que vers l'unique point fixe de f donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.
– Si $u_0 \in [4,+\infty[$, puisque $u_0 \geqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 4, elle converge et ce ne peut être que vers l'unique point fixe de f donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

Nous avons donc montré que $\forall u_0 \geqslant 0,\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

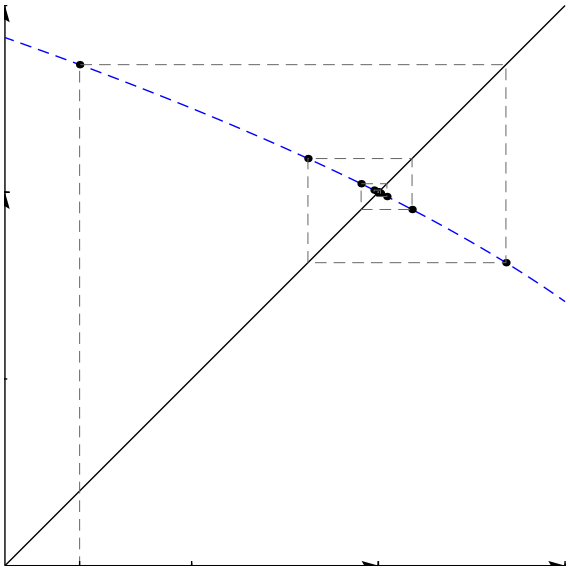
Remarque 3.10 Dans l'étude d'une suite récurrente, il est intéressant d'étudier le signe de la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ qui donne la position du graphe de f par rapport à la première bissectrice et qui permet de connaître le signe de $f(u_0) - u_0$.

PROPOSITION 3.5 **Cas d'une fonction décroissante sur un intervalle stable**
On suppose que la fonction f est continue et *décroissante* sur un intervalle I *stable* et que $u_0 \in$ I. Alors les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Démonstration *Notons $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$. On calcule*

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$$

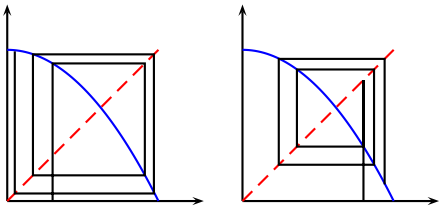
et de même $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$. Les deux suites vérifient la même relation de récurrence associée à la fonction $g = f \circ f$. Puisque la fonction f est décroissante sur I*, la fonction g est croissante sur* I *et les deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones. Si $u_0 \leqslant f \circ f(u_0)$, alors $u_1 \geqslant f \circ f(u_1)$ et d'après la proposition 3.4, la suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante. Si par contre $u_0 \geqslant f \circ f(u_0)$, alors $u_1 \leqslant f \circ f(u_1)$ donc (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante.*



Remarque 3.11 La preuve précédente montre qu'il peut être intéressant d'étudier le signe de la fonction définie par $\theta(x) = f \circ f(x) - x$.

Exemple 3.51 Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2 \end{cases}$$



Introduisons la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$. On vérifie facilement que l'intervalle I $= [0,1]$ est stable par f donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. La fonction f est décroissante sur I et admet un unique point fixe $l \in [0,1]$ vérifiant $l^2 + l - 1 = 0$ c'est-à-dire $l = (\sqrt{5}-1)/2$. On calcule $g(x) = f \circ f(x) = 1 - (1-x^2)^2$ puis $g(x) - x = x(1-x)(x^2+x-1)$. Les points fixes de g dans $[0,1]$ sont donc 0, l et 1. En utilisant le théorème précédent,

- Si $0 \leqslant u_0 < l$, puisque $g(u_0) \geqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante. Puisque (u_{2n}) est décroissante minorée par 0, elle converge d'après le théorème de la limite monotone et ce ne peut être que vers un point fixe x de g. Par passage à la limite dans l'inégalité $u_{2n} \leqslant u_0$, on obtient que $x \leqslant u_0 < l$ d'où la seule possibilité $x = 0$. Nous avons donc montré que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Le même raisonnement montre que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la suite (u_n) est donc divergente.
- Si $l < u_0 \leqslant 1$, comme $g(u_0) \leqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) décroissante. Elles convergent toutes les deux vers l ce qui montre en vertu du théorème 10.24 page 363 que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

C.5.2 Vitesse de convergence d'une suite

On s'intéresse dans ce paragraphe à la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite. Votre calculatrice sait faire des opérations simples comme l'addition, la multiplication et la division de nombres décimaux. Lorsque vous tapez 2 suivi de la touche « racine », votre calculatrice utilise un *algorithme* qui calcule une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ en n'effectuant que des additions, multiplications et divisions.

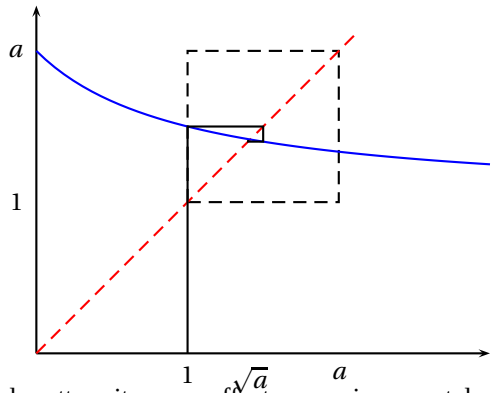
Certaines suites convergent vers $\sqrt{a}$ très lentement et demandent un grand nombre de termes pour obtenir une approximation satisfaisante alors que d'autres convergent très rapidement et il suffit de calculer quelques termes pour obtenir une précision à neuf chiffres.
Considérons une suite (u_n) qui converge vers une limite finie l. Nous noterons

$$\varepsilon_n = |u_n - l|$$

l'erreur commise en approximant la limite l par le n-ième terme de notre suite. La vitesse de convergence de la suite (u_n) vers sa limite est la vitesse de convergence de la suite d'erreurs (ε_n) vers 0. Nous voulons connaître le nombre n de termes à calculer pour que cette précision soit inférieure à une valeur $\varepsilon = 10^{-p}$ donnée. Pour fixer les idées, supposons que notre suite soit une suite récurrente et qu'à chaque terme le calcul de $f(x)$ prenne 10^{-6} secondes à notre calculatrice. Nous noterons T le temps total de calcul pour aboutir à une précision de 10^{-10}.
– Si $\varepsilon_n = 1/n$, pour que $\varepsilon_n \leqslant 10^{-p}$, il faut prendre $n = 10^p$. Il faut calculer 10^{10} termes de notre suite ce qui nécessite un temps de calcul $T = 10^4$ secondes ou environ 3 heures …
– Si $\varepsilon_n = 1/n^2$, n vaut $10^{p/2}$ et $T = 10^{-1}$: un dixième de seconde.
– Si $\varepsilon_n = 1/10^n$, $n = p$ et $T = 10^{-5}$ secondes.
On utilise le vocabulaire suivant pour classifier les vitesses de convergences :
– Si $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, (par exemple si $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$), on parle de *convergence lente*.
– Si $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k \in]0,1[$ (par exemple si $\varepsilon_n = k^n$), on parle de *convergence géométrique*.
– Si $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, (par exemple si $\varepsilon_n = 1/n!$), on parle de *convergence rapide*.

Exemple 3.52 Étudions un premier algorithme de calcul de la racine carrée d'un nombre $a > 1$ basé sur la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + a}{u_n + 1} \end{cases}$$



Pour calculer les termes successifs de cette suite, nous effectuons uniquement des additions et des divisions. Définissons la fonction associée : $f : \begin{cases} [0,+\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+a}{x+1} \end{cases}$. C'est une homographie de dérivée $f'(x) = \dfrac{1-a}{(x+1)^2} < 0$ et on vérifie facilement en étudiant les variations de f que l'intervalle $I = [1, a]$ est stable. On calcule $f(x) - x = \dfrac{(\sqrt{a}-x)(\sqrt{a}+x)}{x+1}$ et on voit que la fonction f admet un unique point fixe $l = \sqrt{a}$ dans l'intervalle I. En utilisant le théorème 3.5 page 1221, on vérifie que la suite (u_{2n}) est croissante, que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et qu'elles convergent toutes les deux vers $\sqrt{a}$ ce qui montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a}$. Étudions la vitesse de convergence de cette suite. Définissons la suite $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$. On obtient une relation de récurrence simple :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{u_n + a}{u_n + 1} - \sqrt{a} = \frac{u_n + a - \sqrt{a}(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{1 - \sqrt{a}}{u_n + 1}\varepsilon_n$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a}$, on en déduit que

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} = k < 1$$

La convergence de cette suite est donc géométrique.

Il existe une classe importante de suites récurrentes définies à l'aide d'une fonction f contractante. La convergence d'une telle suite est assurée par le théorème suivant que vous étudierez dans un cadre plus général en deuxième année.

THÉORÈME 3.6 **Point fixe en dimension un**
Soit $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ une fonction *contractante*, c'est-à-dire une fonction k-lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$:

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant k|x-y|.$$

Alors :

1. La fonction f possède un unique point fixe $l \in [a,b]$.
2. Pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.
3. La convergence est géométrique : $|u_n - l| \leqslant \mathrm{C}k^n$ où C est une constante.

Démonstration *Remarquons que la fonction f est continue sur l'intervalle stable $\mathrm{I} = [a,b]$ puisqu'elle est lipschitzienne. Définissons la fonction g par $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f(a) \geqslant a$, $g(a) \geqslant 0$ et puisque $f(b) \leqslant b$, $g(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $l \in [a,b]$ tel que $g(l) = 0$, c'est-à-dire $f(l) = l$. Montrons l'unicité d'un point fixe de f. Supposons que $l, l' \in [a,b]$ vérifient $f(l) = l$ et $f(l') = l'$. En majorant la différence en valeur absolue, on obtient $|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leqslant k|l - l'|$ d'où $(1-k)|l - l'| \leqslant 0$ et puisque $1 - k > 0$, il vient que $l = l'$. En utilisant que l est un point fixe, majorons*

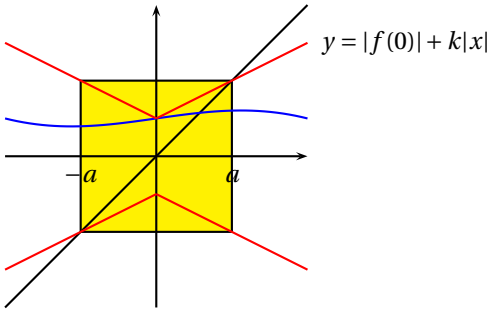
$$|u_{n+1} - l| = \big|f(u_n) - f(l)\big| \leqslant k|u_n - l|$$

Une récurrence simple montre qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant |u_0 - l|k^n$.

Remarque 3.12 On vérifie en pratique qu'une fonction est contractante en calculant sa dérivée et en montrant que $\sup|f'| \leqslant k < 1$. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction contractante, on peut montrer en utilisant les outils de math. sup. qu'elle admet un segment $\mathrm{I} = [-a,a]$ stable puis appliquer le théorème précédent. Puisque f est k-lipschitzienne, grâce à la minoration de l'inégalité triangulaire, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| - |f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant k|x|$$

et donc $|f(x)| \leqslant |f(0)| + k|x|$. Le graphe de la fonction f est situé dans la région délimitée par les courbes d'équation $y = |f(0)| + k|x|$ et $y = -|f(0)| - k|x|$. La première bissectrice coupe ces courbes en a et $-a$ où $a = |f(0)|/(1-k)$. On vérifie facilement que le segment $[-a,a]$ est stable par f et d'après le théorème précédent, la fonction f admet un unique point fixe $l \in \mathbb{R}$ situé dans le segment $[-a,a]$.



Exemple 3.53 Étudions une autre suite récurrente qui permet également de calculer une valeur décimale approchée de $\sqrt{a}$:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

Remarquons que le calcul de u_n ne fait intervenir ici aussi que des additions et des divisions. Introduisons la fonction $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$. On calcule $f'(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{2x^2}$ et $f(x) - x = \dfrac{a - x^2}{2x}$. On en déduit que f possède un unique point fixe $l = \sqrt{a}$ ainsi que la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

– Si $0 < u_0 \leqslant \sqrt{a}$, alors $u_1 \geqslant \sqrt{a}$ et on se ramène au cas suivant.
– Si $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, comme l'intervalle $[\sqrt{a},+\infty[$ est stable par f, et que f est croissante sur cet intervalle avec $f(x) \leqslant x$, on vérifie que la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$. Elle converge donc vers $\sqrt{a}$.

Considérons désormais l'erreur commise en approximant $\sqrt{a}$ par u_n : $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$. On obtient facilement une relation de récurrence liant ε_{n+1} à ε_n.

$$\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{2u_n}$$

Puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant u_1$, on en déduit que

$$0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant C\varepsilon_n^2$$

où $C = 1/(2u_1)$. Lorsque la suite d'erreurs vérifie une telle relation, on dit que la convergence est *quadratique*. Pour comprendre la signification pratique d'une telle convergence, regardons le cas d'une suite d'erreurs (e_n) vérifiant $e_{n+1} \leqslant e_n^2$. Si u_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-p} près, $(e_n \leqslant 10^{-p})$, alors comme $e_{n+1} \leqslant e_n^2$, le terme suivant u_{n+1} sera une valeur approchée à 10^{-2p} près. Le nombre de décimales communes entre u_n et sa limite *double* à chaque itération. On peut calculer la liste $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n]$ avec Maple (nous avons pris $a = 2$) :

MAPLE

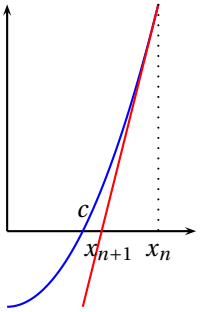
```
liste_erreurs := proc(n)
   local u, l, rac2;
   rac2 := evalf(sqrt(2));
   u := 1.;
   l := NULL;
   for i from 1 to n do
      l := l, u - rac2;
      u := (u + 2/u) / 2;
   od;
   [l];
end;

Digits := 30; liste_erreurs(10);
```

On obtient la liste d'erreurs

$$[-0.41421, 0.08578, 0.00245, 2.45 \times 10^{-6}, 1.59 \times 10^{-12}, 8.99 \times 10^{-25}, 0, 0, 0, 0]$$

On voit que u_5 est déjà une approximation de $\sqrt{2}$ avec 24 décimales exactes. À partir de u_6, l'erreur est inférieure à la précision de 30 décimales définie par la variable `Digits`.

La suite précédente est un cas particulier de la méthode de Newton qui permet de trouver une valeur approchée du zéro d'une fonction. Supposons que x_n soit une première valeur approchée de l'unique zéro c de la fonction g sur l'intervalle I. L'idée consiste à approximer le graphe de g par sa tangente au point x_n. L'intersection de cette tangente avec l'axe (Ox) va fournir une meilleure valeur approchée de c :



Si l'on suppose la fonction g dérivable sur I et que g' ne s'annule pas sur I, l'équation de la tangente au point $(x_n, g(x_n))$ s'écrit $Y = g(x_n) + g'(x_n)(X - x_n)$. On cherche $x_{n+1} = X$ pour que $Y = 0$ et on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Si l'on prend la fonction g définie par $g(x) = x^2 - a$ qui s'annule en $\pm\sqrt{a}$, on retrouve notre suite récurrente $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

Multimédia : Une applet maple pour voir l'effet d'une convergence quadratique, géométrique sur le nombre de décimales exactes

C.6 Fractions rationnelles, primitives

Dans ce paragraphe, nous allons voir des techniques pour calculer une primitive d'une fonction sur un intervalle. Il est indispensable de comprendre que l'on ne sait calculer une primitive que d'un nombre très restreint de types de fonctions. Il est donc primordial de reconnaître des classes de fonctions que l'on saura primitiver et de connaître les algorithmes correspondants.

La première classe intéressante de fonctions que l'on sait primitiver est formée des fractions rationnelles. L'algorithme est basé sur leur décomposition en éléments simples. Nous commençons donc par étudier la pratique de cette décomposition. On obtient la décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ avec Maple en utilisant la commande `convert` :

MAPLE

```
> F := (X^5 + 1) / (X^3 - X)^2;
                                  5
                                 X  + 1
                          F := ---------
                                 3     2
                                (X  - X)
> convert(F, parfrac, X);
                    1             1            1      1
            1/2 -------- - 1/4 ----- + 5/4 ----- + ----
                       2       X - 1       X + 1     2
                  (X - 1)                           X
```

On calcule une primitive avec Maple en utilisant la commande `int` :

MAPLE

```
 f := x / (x^3+1);
                                   x
                            f := ------
                                   3
                                  x  + 1
> int(f, x);
                           2
  - 1/3 ln(x + 1) + 1/6 ln(x  - x + 1) +
     1/3 sqrt(3) arctan(1/3 (2 x - 1) sqrt(3))
```

C.6.1 Décomposition pratique dans $\mathbb{C}$

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes : $F = \dfrac{P}{Q}$ où Q est un polynôme unitaire. Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme est scindé. Le polynôme Q peut donc s'écrire $Q = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n}$. La forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ s'écrit alors :

$$F = E + \left(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}}\right) + \cdots + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}}\right)$$

où la partie entière $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme et où les coefficients $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ sont complexes.

Calcul de la partie entière

1. Lorsque $\deg(P) < \deg(Q)$, $E = 0$. Lorsque $d = \deg(P) - \deg(Q) \geqslant 0$, E est un polynôme de degré d.
2. Lorsque $d = 0$, E est un polynôme constant qui s'obtient directement : $E = a_p$ où a_p est le coefficient de plus haut degré de P.
3. Lorsque $d \geqslant 1$, E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Exemple 3.54 $F = \dfrac{X^3 + 1}{X^2 - 3X + 2} = (X + 3) + \dfrac{7X - 5}{X^2 - 3X + 2}$.

On se ramène alors à décomposer $\dfrac{R}{Q}$ où R est le reste de la division de P par Q (avec une partie entière nulle).

Calcul du coefficient associé à une pôle simple

Lorsque $\alpha_i = 1$, on dit que le pôle a_i est *simple*.

Exemple 3.55

$$\frac{7X - 5}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{\lambda}{X - 1} + \frac{\mu}{X - 2}$$

et on cherche les coefficients λ et μ. Il suffit de multiplier la décomposition par $(X-a_i)$ et de prendre $x=a_i$ dan la fraction restante :

$$\frac{7X-5}{X-2}=\lambda+\mu\frac{X-1}{X-2}.$$

En prenant $x=1$, on trouve que $-2=\lambda$. De même, en multipliant par $(X-2)$:

$$\frac{7X-5}{X-1}=\lambda\frac{X-2}{X-1}+\mu$$

et en prenant $x=2$, on trouve que $9=\mu$. On écrit alors la décomposition complète :

$$\frac{X^3+1}{(X-1)(X-2)}=(X+3)+\frac{-2}{X-1}+\frac{9}{X-2}.$$

Calcul des coefficients associés à un pôle multiple

Il existe une méthode qui permet de calculer tous les coefficients λ_{ij} (division selon les puissances croissantes d'un polynôme), mais elle est hors programme et en pratique l'ordre des pôles est généralement inférieur à 2. Nous préférons vous montrer une technique plus utile.

Exemple 3.56 Décomposons la fraction

$$F=\frac{X^3}{(X-1)^2(X-2)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-2)}+\frac{d}{(X-2)^2}.$$

1. Multiplions par X les deux membres :

$$\frac{X^4}{(X-1)^2(X-2)^2}=a\frac{X}{X-1}+b\frac{X}{(X-1)^2}+c\frac{X}{(X-2)}+d\frac{X}{(X-2)^2}.$$

   En faisant $x\to+\infty$, on obtient *toujours* une relation intéressante. Ici, $1=a+c$. Il suffit donc de trouver l'un des deux coefficients a et c et on connaît automatiquement l'autre.

2. Les coefficients b et d sont simples à déterminer. Il suffit de multiplier les deux membres par $(X-1)^2$:

$$\frac{X^3}{(X-2)^2}=a(X-1)+b+c\frac{(X-1)^2}{(X-2)}+d\frac{(X-1)^2}{(X-2)^2}.$$

   En prenant ensuite $x=1$, on tire $b=1$. De la même façon, en multipliant par $(X-2)^2$ puis en prenant $x=2$, on tire $d=8$.

3. Il suffit enfin de prendre une valeur particulière pour x afin d'obtenir une nouvelle relation liant a et c. Ici, pour $x=0$, on a

$$0=-a+b-c/2+d/4=-a-c/2+3.$$

   On a les deux relations

$$\begin{cases}a+c&=1\\2a+c&=6\end{cases}$$

   et l'on tire $a=5$, $c=-4$.

4. La décomposition s'écrit donc :

$$\frac{X^4}{(X-1)^2(X-2)^2}=\frac{5}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{4}{(X-2)}+\frac{8}{(X-2)^2}.$$

C.6.2 Décomposition pratique dans $\mathbb{R}$

Considérons une fraction rationnelle $F=\frac{P}{Q}\in\mathbb{R}(X)$. La décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur s'écrit :

$$Q=(X-a_1)^{\alpha_1}\dots(X-a_n)^{\alpha_n}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\dots(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon unique :

$$\begin{aligned}
F = E + \Big[\Big(&\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\Big) + \dots \\
&+ \Big(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\Big)\Big] \\
+\Big[\Big(&\frac{\mu_{11}X+\delta_{11}}{X^2+b_1X+c_1} + \frac{\mu_{12}X+\delta_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2} + \cdots + \frac{\mu_{1\beta_1}X+\delta_{1\beta_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}}\Big) + \dots \\
&+ \Big(\frac{\mu_{p1}X+\delta_{p1}}{X^2+b_pX+c_p} + \frac{\mu_{p2}X+\delta_{p2}}{(X^2+b_pX+c_p)^2} + \cdots + \frac{\mu_{p\beta_p}X+\delta_{p\beta_p}}{(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme nul ou de degré $d = \deg P - \deg Q$, et tous les λ_{ij}, μ_{ij}, δ_{ij} sont des réels. Le premier groupe est formé *d'éléments simples de première espèce* et le second groupe d'*éléments simples de seconde espèce*.
Nous allons voir sur des exemples simples comment calculer les coefficients de cette décomposition.

Exemple 3.57 1

$$F = \frac{1}{X^3+1}$$

1. Commençons par factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le dénominateur : $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$. La décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit donc
$$\frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$
2. On calcule facilement le coefficient du pôle simple en multipliant par $(X-1)$ et en prenant $x = 1$: $a = 1/3$.
3. En multipliant par X et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve une relation entre coefficients : $0 = a + b$ d'où $b = -1/3$.
4. Il ne reste que le coefficient c à déterminer. En prenant $x = 0$, on a la relation $1 = a + c$ d'où $c = 2/3$.
5. La décomposition s'écrit donc :
$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X-2}{X^2-X+1}\right)$$

Exemple 3.58

$$F = \frac{1}{X^4+1}$$

Le polynôme $Q = X^4+1$ est bicarré. On obtient sa décomposition en suivant la technique du paragraphe B.4.4 :

$$X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{X}+1}.$$

Le plus rapide lorsqu'il n'y a pas de pôles simples consiste à réduire au même dénominateur :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{[a+c]X^3 + [\sqrt{2}(a-c)+(b+d)]X^2 + [(a+c)+\sqrt{2}(b-d)]X + (b+d)}{X^4+1}.$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a+c & = 0 \\ \sqrt{2}(a-c)+(b+d) & = 0 \\ b-d & = 0 \\ b+d & = 1 \end{cases} \text{ d'où } b = d = 1/2, a = -1/2\sqrt{2} = -c.$$

La décomposition s'écrit donc :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{X^2+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \frac{X^2-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right).$$

C.6.3 Primitives de fractions rationnelles

Rappelons qu'on dit qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f *sur un intervalle* I lorsque F est dérivable et que $\mathrm{F}' = f$. Toute fonction f continue possède une primitive (théorème fondamental de l'analyse) et toutes les primitives de f diffèrent d'une constante. Dans les calculs qui suivent, on ne notera pas les constantes de primitivation. On ne définira pas non plus les intervalles sur lesquels on cherche les primitives (ils sont définis à partir des pôles de la fraction). Ne pas confondre primitive $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (une fonction) avec une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (un réel). Les méthodes que nous allons voir s'appliquent également au calcul d'intégrales : il suffit de ne pas oublier de modifier les bornes lors d'un changement de variables.

On veut calculer une primitive d'une fraction rationnelle $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$. On commence par décomposer la fraction en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ et on doit alors primitiver des éléments simples de première espèce et de deuxième espèce.

Primitives des éléments simples de première espèce

On connaît une primitive sur $\mathrm{I}_1 =]-\infty, a[$ ou $\mathrm{I}_2 =]a, +\infty[$ de :

♡ **3.12**
$$\mathrm{F}(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \begin{cases} -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} & \text{si } k \neq 1 \\ \ln|x-a| & \text{si } k = 1 \end{cases}.$$

Remarque 3.13 Ces primitives se rencontrent très souvent en pratique. Il suffit de retenir que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ (le dénominateur ne doit pas s'annuler) :

♡ **3.13**
$$\int (x-a)^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}.$$

et d'écrire
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} = \frac{-1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

Primitive des éléments simples de seconde espèce

Il est bon de connaître par coeur deux primitives fondamentales que l'on rencontre souvent dans les calculs :

♡ **3.14**
$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} &= \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} &= \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| \end{cases}.$$

Pour primitiver un élément simple de seconde espèce
$$\mathrm{F}(x) = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x$$
on procède *dans l'ordre suivant* :

1. **Éliminer x du numérateur :**
$$\mathrm{F}(x) = \frac{a}{2}\left(\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2b/a-p}{(x^2+px+a)^k}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{a}{2}\int \frac{u'(x)}{u^k(x)}\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}.$$
On sait primitiver :
$$\int \frac{u'(x)}{u^k(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{(k-1)u^{k-1}(x)} & \text{pour } k \geqslant 2 \\ \ln|u(x)| & \text{pour } k = 1 \end{cases}.$$
On se ramène donc à trouver une primitive $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$.
2. **Mettre le trinôme sous forme canonique :** on écrit
$$x^2+px+q = (x+p/2)^2 + (q-p^2/4) = (x-\alpha)^2 + a^2$$
où $a = \sqrt{4q-p^2}/2$ ($\Delta = p^2-4q < 0$ puisque le trinôme est irréductible). On effectue ensuite le changement de variables $y = x + p/2$ et on se ramène à primitiver
$$\mathrm{G}_k(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^k}$$

Lorsque $k=1$, $\mathrm{G}_1(y)=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{y}{a}$ et pour $k\geqslant 2$,

3. **Intégrer par parties** $\mathrm{G}_{k-1}(y)$ **:**

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_{k-1}(y)&=\int\frac{\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^{k-1}}\\&=\frac{y}{(y^2+a^2)^{k-1}}+2(k-1)\int\frac{y^2+a^2-a^2}{(y^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{y}{(y^2+a^2)^{k-1}}+2(k-1)\left[\mathrm{G}_{k-1}(y)-a^2\mathrm{G}_k(y)\right].\end{aligned}$$

On exprime alors $\mathrm{G}_k(y)$ en fonction de $\mathrm{G}_{k-1}(y)$ et en itérant, en fonction de $\mathrm{G}_1(y)$ que l'on sait calculer.

Exemple 3.59 Calculons $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$. On a décomposé la fraction en éléments simples dans l'exemple 3.57 page 1228 : $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|x+1|-\mathrm{G}(x)$. On écrit alors

$$\mathrm{G}(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{3}{2}\mathrm{H}(x)$$

avec $\mathrm{H}(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4}$. Avec le changement de variables $y=(x-1/2)$, on calcule $\mathrm{K}(y)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y}{\sqrt{3}}$ et donc $\mathrm{H}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ et finalement,

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exemple 3.60 Calculons $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{\mathrm{d}x}{[(x+1/2)^2+3/4]^2}}_{\mathrm{G}(x)}.$$

Avec le changement de variables $y=x+1/2$ et en posant $a=\sqrt{3}/2$, on est amené à calculer $\mathrm{H}_2(y)=\dfrac{\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^2}$. En intégrant par parties

$$\mathrm{H}_1(y)=\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+a^2}=\frac{y}{y^2+a^2}+2\int\frac{y^2+a^2-a^2}{(y^2+a^2)^2}=\frac{y}{y^2+a^2}+2\mathrm{H}_1(y)-2a^2\mathrm{H}_2(y)$$

on trouve que $\mathrm{H}_2(y)=\dfrac{1}{2a^2}\left[\dfrac{y}{y^2+a^2}+\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{y}{a}\right)\right]$ d'où $\mathrm{G}(x)=\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ et finalement

$$\mathrm{F}(x)=\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

C.6.4 Primitives $\int\mathrm{F}(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$, règles de Bioche

On sait en théorie primitiver des fonctions définies par $f(x)=\dfrac{\mathrm{P}(\sin x,\cos x)}{\mathrm{Q}(\sin x,\cos x)}$ où P(X,Y) et Q(X,Y) sont des polynômes en deux variables (sommes-produits de X et Y). Par exemple :

– $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x+\cos x}{\sin x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\dfrac{\mathrm{X}^3+\mathrm{Y}}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}^2}$.

– $\displaystyle\int\frac{\tan x}{1+\tan^3 x}\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\dfrac{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}{1+\mathrm{X}^3/\mathrm{Y}^3}=\dfrac{\mathrm{X}\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^3+\mathrm{Y}^3}$.

On définit *l'élément différentiel* $\omega(x) = \mathrm{F}(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ et on regarde s'il est invariant par l'un des trois changements de variables $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto \pi + x$. Par exemple, pour calculer $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$,

$$\omega(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$$

- $\omega(-x) = \dfrac{(-\sin x)(\cos x)}{-\sin^3 x + \cos^3 x}(-\,\mathrm{d}x) = \dfrac{\sin x \cos x}{-\sin^3 x + \cos^3 x} \neq \omega(x)$.
- $\omega(\pi - x) = \dfrac{(\sin x)(-\cos x)}{\sin^3 x - \cos^3 x}(-\,\mathrm{d}x) \neq \omega(x)$.
- $\omega(\pi + x) = \dfrac{(-\sin x)(-\cos x)}{-\sin^3 x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = -\omega(x)$.

L'élément différentiel n'est invariant par aucun des changements de variables.

Pour $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$,

- $\omega(-x) = \omega(x)$.
- $\omega(\pi - x) = \omega(x)$.
- $\omega(\pi + x) = \omega(x)$.

L'élément différentiel est invariant par chaque changement de variables.

Les règles de Bioche (hors programme) suggèrent un changement de variables intéressant qui ramène le calcul à une primitive d'une fraction rationnelle :

1. Si $\omega(-x) = \omega(x)$, faire le changement de variables $t = \cos(x)$.
2. Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, faire le changement de variables $t = \sin(x)$.
3. Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, faire le changement de variables $t = \tan x$.
4. Si $\omega(x)$ n'est invariant par aucune des trois transformations, faire le changement de variables $t = \tan(\frac{x}{2})$.

Remarque 3.14 Ces règles sont faciles à mémoriser : parmi les trois fonctions $\sin, \cos, \tan$, cos est la seule invariante par $x \mapsto -x$, sin est la seule invariante par $x \mapsto \pi - x$ et tan est la seule invariante par $x \mapsto \pi + x$.

Exemple 3.61

$$\mathrm{F}(x) = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$$

On voit que $\omega(-x) = \omega(x)$. Comprenons pourquoi le changement de variables $t = \cos x$ va fonctionner : $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$ d'où $\mathrm{F}(x) = -\displaystyle\int \frac{(-\sin x\,\mathrm{d}x)}{1 + (1 - \cos^2 x)}$ et on se ramène à calculer la primitive de la fraction rationnelle :

$$\mathrm{G}(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right|$$

d'où finalement

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x}.$$

Exemple 3.62

$$\mathrm{F}(x) = \int \tan x\,\mathrm{d}x$$

1. $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut donc effectuer le changement de variables $t = \cos(x)$, $\mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{F}(x) = -\int \frac{(-\sin x\,\mathrm{d}x)}{\cos x}$$

$$\mathrm{G}(t) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t|$$

d'où $\mathrm{F}(x) = -\ln|\cos x|$.

2. $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut effectuer le changement de variables $t = \sin(x)$, $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{F}(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}(\cos x\,\mathrm{d}x) = \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x}(\cos x\,\mathrm{d}x)$$

$$\mathrm{G}(t) = \int \frac{t}{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln|t^2 - 1|$$

d'où $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|1 - \sin^2 x| = -\ln|\cos x|$.

3. $\omega(\pi+x)=\omega(x)$, on peut effectuer le changement de variables $t=\tan x,\ \mathrm{d}t=(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. En utilisant la relation $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$\mathrm{F}(x)=\int \tan x\cos^2 x\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{G}(t)=\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

d'où

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x}=-\ln|\cos x|.$$

Exemple 3.63

$$\mathrm{F}(x)=\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

$\omega(x)$ n'est invariant par aucune des trois transformations. On utilise le changement de variables général $t=\tan\frac{x}{2}$:

♡ **3.15**

$$\begin{cases}\sin(x) &= \dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos(x) &= \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan(x) &= \dfrac{2t}{1-t^2}\\ \mathrm{d}x &= \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\end{cases}.$$

$$\mathrm{G}(t)=\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

d'où $\mathrm{F}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)$.

Remarque 3.15 En toute rigueur, les changements de variables de cette section ne sont valables que sur certains intervalles. Par exemple dans le dernier calcul, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2+\cos(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Mais le changement de variables $t=\tan(x/2)$ n'est défini que sur les intervalles $\mathrm{J}_k=](2k-1)\pi,(2k+1)\pi[$. La primitive que nous avons obtenue n'est pas définie pour $x=(2k+1)\pi$. On s'aperçoit tout de même que $\mathrm{F}(x)\xrightarrow[x\to(2k+1)\pi]{}\pm\pi/\sqrt{3}$ et on peut donc « recoller »les différentes primitives en ajustant les constantes d'intégration pour obtenir une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit ensuite de vérifier que la fonction obtenue est dérivable en chacun des points $(2k+1)\pi$ et que sa dérivée coïncide avec la valeur de f en ces points…

On rencontre souvent dans les calculs les primitives de Wallis :

$$\mathrm{W}_k(x)=\int \sin^k x\,\mathrm{d}x$$

1. Lorsque k est impair, $\mathrm{W}_{2p+1}(x)=\displaystyle\int(1-\cos^2 x)^p\sin x\,\mathrm{d}x$. Par le changement de variables $y=\cos x$, on se ramène à primitiver un polynôme $-\displaystyle\int(1-y^2)^p\,\mathrm{d}y$.
2. Lorsque k est pair et petit, on peut linéariser $\sin^{2p}x$. Par exemple,
$$\mathrm{W}_2(x)=\int\frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}.$$
3. Lorsque k est pair et supérieur à 4, utiliser une intégration par parties pour trouver une relation de récurrence :
$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{2p+2}(x)&=\int\sin^{2p+1}x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &=-\sin^{2p+1}x\cos x+(2p+1)\int\sin^{2p}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\\ &=-\sin^{2p+1}x\cos x+(2p+1)[\mathrm{W}_{2p}(x)-\mathrm{W}_{2p+2}(x)].\end{aligned}$$

On exprime $W_{2p+2}(x)$ en fonction de $W_{2p}(x)$ et on itère cette relation pour exprimer $W_{2p}(x)$ en fonction de $W_0(x) = x$.

Voir l'exercice 13.95 page 584.

C.6.5 Primitives $\int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Puisque $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on peut utiliser le changement de variables $y = e^x$ qui conduit à une primitive de fraction rationnelle en y. On peut également utiliser les règles de Bioche. On remplace dans $\omega(x)$, $\operatorname{sh}(x)$ par $\sin(x)$ et $\operatorname{ch}(x)$ par $\cos(x)$. Si les règles de Bioche indiquent le changement de variables $y = \cos(x)$ (resp. $\sin(x)$, $\tan x$), on utilise le changement de variables $y = \operatorname{ch}(x)$ (resp. $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{th}(x)$).

Exemple 3.64 Calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x(2+\operatorname{sh}^2 x)}\,dx$. On notant $\omega(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x(2+\sin^2 x)}$, $\omega(-x) = \omega(x)$, $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ et $\omega(\pi + x) = \omega(x)$. On peut utiliser plusieurs changements de variables :

1. $t = \operatorname{sh} x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{t^3}{(1+t^2)(2+t^2)}\,dt$.
2. $t = \operatorname{ch} x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}\,dt$.
3. $t = \operatorname{th} x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{t^3}{2-t^2}\,dt$.
4. $t = e^x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{(t^2-1)^3}{t(t^2+1)(t^4+6t^2+1)}\,dt$.

Les fractions rationnelles à primitiver ne sont pas toutes agréables ! Le mieux ici est d'utiliser le changement de variables $t = \operatorname{th} x$ pour calculer

$$G(t) = -\frac{t^2}{2} - \ln|t^2 - 2|$$

puis

$$F(x) = -\frac{\operatorname{th}^2(x)}{2} - \ln(2 - \operatorname{th}^2 x) + C$$

C.6.6 Primitives avec des racines

Deux types de primitives avec radicaux sont à connaître :

Primitives $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Ce sont des primitives de fractions rationnelles en x et en une racine n-ième d'une homographie. Dans la notation précédente, $F(X,Y)$ est une fraction rationnelle. Par exemple :

– $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+x}{x^2+x\sqrt{x+1}}\,dx$ où $F(X,Y) = \dfrac{X+Y}{X^2+XY}$

– $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+2}}\,dx$ où $F(X,Y) = \dfrac{X}{X^2+1}Y$.

Pour calculer ces primitives, on effectue le changement de variables $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $x = -\dfrac{dy^n - b}{cy^n - a}$, $dx = \dfrac{ad-bc}{(cy^n-a)^2} n y^{n-1}\,dy$ et on se ramène au calcul d'une primitive de fraction rationnelle.

Exemple 3.65 Calculer $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x}$ sur l'intervalle $I =]0,1[$. On effectue le changement de variables

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \quad dx = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$$

et on se ramène à calculer la primitive

$$G(y) = 4\int \frac{y^2}{(y^2-1)(y^2+1)}\,dy.$$

La décomposition de la fraction rationnelle s'écrit

$$\frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)} = \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{1/2}{X^2+1}$$

et on trouve que $G(y) = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + 2\arctan y$. Après simplifications :

$$F(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On peut utiliser ensuite les quantités conjuguées pour écrire

$$F(x) = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Exemple 3.66 Calculer une primitive $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.
On reconnaît une primitive de notre type avec ici $\sqrt[6]{x}$ qui est une racine sixième d'une homographie et $F(X,Y) = \frac{1}{Y^3+Y^2}$.
Avec le changement de variables $y = \sqrt[6]{x}$, $x = y^6$, $dx = 6y^5\,dy$, on se ramène à calculer

$$G(y) = 6\frac{y^3}{1+y}\,dy$$

et en effectuant la division euclidienne de X^3 par $(X+1)$:

$$\frac{y^3}{1+y} = y^2 - y + 1 - \frac{1}{1+y}$$

on calcule

$$G(y) = 2y^3 - 3y^2 + 6y - 6\ln|y+1|$$

d'où finalement

$$F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}).$$

Primitives $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Ce sont des primitives de fractions rationnelles en x et en une *racine carrée* d'un *trinôme*. Par exemple, on sait calculer :
– $\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ avec $F(X,Y) = \frac{X+Y}{X^2+Y}$,
– $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^{3/2}}\,dx$ avec $F(X,Y) = \frac{X^4+1}{X(X^2+1)Y}$.
Il est bon de connaître par coeur les primitives fondamentales ($a > 0$) :

♡ **3.16**

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) & (I =]-a,a[) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right) & (I = \mathbb{R}) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{argch}\left(\frac{x}{a}\right) & (I =]a,+\infty[) \end{cases}.$$

Si le trinôme possède deux racines réelles $\alpha < \beta$ et on veut calculer par exemple une primitive sur $I =]\alpha,\beta[$, $F(x) = \int F(x, \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)})\,dx$ le plus rapide consiste à se ramener à une racine d'une homographie en factorisant $(x-\alpha)$:

Exemple 3.67 Calculons $F(x) = \int \sqrt{x(1-x)}\,dx$ sur $I =]0,1[$. En écrivant $F(x) = \int x\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$, on se ramène à une primitive du paragraphe précédent. Le changement de variables $y = \sqrt{(1-x)/x}$, $x = 1/(y^2+1)$ mène au calcul de

$$G(y) = -2\int \frac{y^2}{(y^2+1)^3}\,dy = \frac{y}{2(y^2+1)^2} - \frac{y}{4(y^2+1)} - \frac{1}{4}\arctan y.$$

On trouve finalement

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2x-1}{4}\sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Dans l'algorithme général de calcul de ces primitives, on commence par réduire le trinôme sous forme canonique. Par un premier changement de variables affine $y = (x-a)/b$, on se ramène à calculer une primitive de la forme :

1. $\int \mathrm{F}(y, \sqrt{1-y^2})\,\mathrm{d}y$: on effectue alors le changement de variables $y = \sin\theta$ (ou $y = \cos(\theta)$). Avec la formule de trigonométrie $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\sqrt{1-\sin^2\theta} = |\cos\theta|$ et on se ramène à une primitive de type $\int \mathrm{F}(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ que l'on sait calculer.
2. $\int \mathrm{F}(y, \sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}y$: on effectue le changement de variables $y = \mathrm{sh}\,\theta$. Avec la formule de trigonométrie $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$, on élimine la racine : $\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\theta} = \mathrm{ch}\,\theta$ et on se ramène à une primitive du type $\int \mathrm{F}(\mathrm{sh}\,\theta, \mathrm{ch}\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ que l'on sait calculer.
3. $\int \mathrm{F}(y, \sqrt{y^2-1})\,\mathrm{d}y$: on effectue le changement de variables $y = \mathrm{ch}\,\theta$ car $\sqrt{\mathrm{ch}^2\theta - 1} = |\mathrm{sh}\,\theta|$ et on se ramène à une primitive de type $\int \mathrm{F}(\mathrm{sh}\,\theta, \mathrm{ch}\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Exemple 3.68 Calculer $\mathrm{F}(x) = \int \sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$. On réduit le trinôme à l'intérieur de la racine :

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]^2+1}$$

et par le premier changement de variables $y = (2x+1)/\sqrt{3}$, on se ramène au calcul de $\mathrm{G}(y) = \frac{3}{4}\int \sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y$. Ensuite, avec la changement de variables $y = \mathrm{sh}\,\theta$, $\mathrm{d}y = \mathrm{ch}\,\theta\,\mathrm{d}\theta$, on se ramène à

$$\mathrm{H}(\theta) = \frac{3}{4}\int \mathrm{ch}^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Il suffit de linéariser $\mathrm{ch}^2\theta = \dfrac{\mathrm{ch}(2\theta)+1}{2}$ pour calculer

$$\mathrm{H}(\theta) = \frac{3}{16}\,\mathrm{sh}(2\theta) + \frac{3}{8}\theta$$

$$\mathrm{G}(y) = \frac{3}{8}\left(y\sqrt{1+y^2} + \mathrm{argsh}(y)\right)$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}).$$

Remarque 3.16 Les primitives $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ se calculent plus rapidement en intégrant par parties. Par exemple :

$$\mathrm{F}(x) = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{argsh}(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

C.6.7 $\int f(x^\alpha)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

Lorsque la primitive à calculer s'écrit sous la forme $\int f(x^\alpha)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, on peut utiliser le changement de variables $y = x^\alpha$. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \alpha\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

et on se ramène à calculer la primitive $\int f(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ qui est plus simple.

Exemple 3.69 Pour calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$, il suffit d'écrire

$$\mathrm{F}(x)=\int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

et de faire le changement de variables $y=x^2$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ pour se ramener à la primitive

$$\mathrm{G}(y)=\frac{1}{2}\int \frac{y^2}{(y+1)^2}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{2}\int \frac{y}{(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

et on trouve $\mathrm{G}(y)=\dfrac{1}{y+1}+\ln|y+1|$ puis $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\ln(x^2+1)$.

Exemple 3.70 Calculons $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$. Cette primitive ne fait pas partie des classes connues, mais avec le changement de variables $y=x^4$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=4\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, on se ramène à calculer

$$\mathrm{G}(y)=\frac{1}{4}\int \frac{1}{y\sqrt{y+1}}\,\mathrm{d}y$$

C'est une fraction rationnelle en y et en une racine nième d'une homographie. Avec le changement de variables $u=\sqrt{y+1}$, $y=u^2-1$, on se ramène à calculer

$$\mathrm{H}(u)=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

Finalement,

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^4+1}+1}$$

Exemple 3.71 Calculer pour $a>0$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}\,\mathrm{d}x$. En écrivant

$$\mathrm{F}(x)=\int \frac{x^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

le changement de variables $y=x^2$ mène au calcul de

$$\mathrm{G}(y)=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^4-y^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{a^2}$$

d'où finalement $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{a^2}$

C.6.8 Intégration par parties

On sait calculer des primitives de type $\int e^x\mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x$. Il suffit d'intégrer plusieurs fois par parties en dérivant le polynôme.

Exemple 3.72 Calculer $\displaystyle\int (x^2-x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$. Une première intégration par parties donne :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{e^{2x}}{2}(x^2-x+3)-\underbrace{\int (x-1/2)e^{2x}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{G}(x)}$$

et une deuxième permet de calculer

$$\mathrm{G}(x)=\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}-\frac{1}{2}\int e^{2x}$$

Finalement, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{(x^2-2x+4)e^{2x}}{4}$.

Exemple 3.73 Calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$. La première méthode consiste à intégrer deux fois par parties pour retrouver $\mathrm{F}(x)$:

$$\mathrm{F}(x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^x(\sin x - \cos x) - \mathrm{F}(x)$$

d'où $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$.
La deuxième méthode consiste à utiliser qu'un sinus ou un cosinus s'exprime à l'aide des exponentielles imaginaires. On primitive une fonction à valeurs complexes et on prend ensuite la partie réelle :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{Im}\left(\int e^x e^{ix}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right)$$

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^x(1+i)(\cos x + i\sin x)}{2}\right) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Le seul espoir pour calculer des primitives faisant intervenir ln, arctan, arcsin,...consiste à intégrer par parties. En effet, les dérivées de ces fonctions sont des fractions rationnelles ou des racines de trinômes. On espère ainsi se ramener à l'une des classes de fonctions que l'on sait primitiver.

Exemple 3.74 Calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$. En primitivant par parties,

$$\mathrm{F}(x) = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Exemple 3.75 $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x$. Si l'on intègre par parties en dérivant ln,

$$\mathrm{F}(x) = \ln(x)\ln(x+1) - \int \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

et la nouvelle primitive fait encore intervenir un logarithme. On ne sait pas primitiver cette fonction à l'aide des fonctions usuelles.

C.6.9 Exercices

Exercice 3.11 ♡♡

Calculer une primitive $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ *sur l'intervalle* $\mathrm{I} =]-1,1[$.

Solution : *En posant* $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x = \frac{-y^2+1}{y^2+1}$, $\mathrm{d}x = -\frac{4y}{(y^2+1)^2}$ *et on se ramène au calcul de*

$$\mathrm{G}(y) = -2\int \frac{y^2(y^2+3)}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{G}(y) = y + \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} - 2\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2}$$

et en utilisant la technique du paragraphe C.6.3, on trouve que

$$\mathrm{F}(x) = -(1-x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Exercice 3.12 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$.

Solution : *Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples :*

$$\frac{1}{X(X^2+X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1+X}{X^2+X+1} - \frac{1+X}{(X^2+X+1)^2}$$

On primitive chacun des éléments simples. Pour calculer la dernière primitive, procéder dans l'ordre :

1. *Éliminer le x du numérateur :* $\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
2. *Par réduction du trinôme et un changement de variables, se ramener à* $\int \frac{dy}{(y^2+1)^2}$
3. *On calcule cette dernière primitive en intégrant par partie* $\int \frac{dy}{(y^2+1)}$.

On trouve finalement,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{-x+1}{3(x^2+x+1)} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$

Exercice 3.13 ♡♡

Calculer $F(x) = \int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) dx$.

Solution : *En intégrant par parties,*

$$F(x) = x\arctan\tfrac{x-1}{x-2} + \underbrace{\int \frac{x}{2x^2-6x+5}\,dx}_{G(x)}$$

On calcule ensuite la primitive de la fraction rationnelle :

$$G(x) = \frac{1}{4}\int \frac{4x-6}{2x^2-6x+5}\,dx + \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{2x^2-6x+5}\,dx}_{H(x)}$$

et

$$H(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3/2)^2+1/4} = \arctan(2x-3)$$

d'où

$$F(x) = x\arctan\tfrac{x-1}{x-2} + \frac{1}{4}\ln|2x^2-6x+5| + \frac{3}{2}\arctan(2x-3)$$

Exercice 3.14 ♡♡

Calculer $F(x) = \int \frac{dx}{x^3(x^2+1)}$.

Solution : *On écrit* $F(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\frac{dx}{x}$ *et avec le changement de variables* $y = x^2$, $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$,

$$G(y) = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2(y+1)}$$

On décompose la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{y+1}$$

En multipliant par y^2 (resp. $y+1$) et en prenant $y=0$ (resp. $y=-1$), on tire $b=1$, $c=1$. En multipliant par y et en faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient la relation $0 = a+c$.

$$G(y) = -\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\ln|y+1|$$

$$F(x) = -\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln(x^2+1)$$

Exercice 3.15 ♡♡

Calculer $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *On décompose la fraction rationnelle avec l'astuce suivante pour profiter de la parité :*

$$\mathrm{F}(x)=\frac{\mathrm{X}^3+\mathrm{X}}{(\mathrm{X}^2+2)^2}=\frac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^2+2}+\frac{c\mathrm{X}+d}{(\mathrm{X}^2+2)^2}$$

Comme $\mathrm{F}(-\mathrm{X})=-\mathrm{F}(\mathrm{X})$, $b=d=0$. *En multipliant par* x *et en faisant tendre* x *vers* $+\infty$, *on tire* $a=1$. *En divisant par* X *et en prenant* $x=0$, *on tire* $b=-1$. *On a donc*

$$\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{x-1}{(x^2+2)^2}$$

Ensuite,

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x-2}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(3/2)+\Big[\frac{1}{2(x^2+2)}\Big]_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}$$

et en intégrant par parties $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}$, *on tire*

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan(1/\sqrt{2})+\frac{1}{12}$$

et finalement,

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3.16 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int\frac{x^2\ln x}{(x^3+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *Commençons par écrire*

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{(x^3+1)^3}\ln(x^3)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Par le changement de variables $u=x^3$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{u}=3\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, *on se ramène à calculer*

$$\mathrm{G}(u)=\frac{1}{9}\int\frac{\ln u}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}u$$

et avec une intégration par parties,

$$\mathrm{G}(u)=\frac{1}{9}\left(-\frac{\ln|u|}{2(u+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)^2}\right)$$

On décompose la fraction

$$\frac{1}{u(u+1)^2}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}$$

et on calcule

$$\mathrm{G}(u)=\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+\frac{1}{u+1}$$

et finalement,

$$\mathrm{F}(x)=-\frac{1}{12}\frac{\ln|x|}{(1+x^3)^2}+\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{18(x^3+1)}-\frac{\ln|x^3+1|}{18}$$

Exercice 3.17 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

Solution : *Avec Bioche, on a* $\omega(-x)=\omega(x)$ *et on effectue donc le changement de variables* $t=\cos x$ *:*

$$\mathrm{G}(t)=-\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2t^5}=-\int\frac{1}{(1-t^2)^2t^4}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Avec le changement de variables $y = t^2$, $\mathrm{d}y/y = 2\,\mathrm{d}t/t$, on se ramène à calculer

$$\mathrm{H}(y) = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2 y^3}$$

Il faut alors décomposer cette fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(y-1)^2 y^3} = \frac{3}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{3}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2}$$

On a calculé directement le coefficient de $(y-1)^2$ et de y^3. Pour calculer les autres, on a retranché $1/y^3$ aux deux membres, simplifié et calculé le coefficient de $1/y^2$ en multipliant par y^2 et en prenant $y = 0$ et ainsi de suite. On obtient alors

$$\mathrm{H}(y) = -\frac{3}{2}\ln|y| + \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} + \frac{3}{2}\ln|y-1| + \frac{1}{2(y-1)}$$

puis

$$\mathrm{F}(x) = 3\ln|\tan x| + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\sin^2 x}$$

Exercice 3.18 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{th} x}$.

Solution : *Avec la règle de Bioche, on effectue le changement de variables $t = \operatorname{th} x$, $\mathrm{d}t = (1-t^2)\,\mathrm{d}x$:*

$$\mathrm{G}(t) = \int \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

La décomposition de la fraction rationnelle s'écrit :

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{1/4}{t+1} - \frac{1/4}{t-1} + \frac{1/2}{(t-1)^2}$$

d'où $\mathrm{G}(t) = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right| - \dfrac{1}{2(t-1)}$ *et finalement*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x + 1}{\operatorname{th} x - 1}\right| - \frac{1}{2(\operatorname{th} x - 1)}$$

Exercice 3.19 ♡♡

Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{dt}{t}$.

Solution : *C'est une fraction rationnelle en t et en la racine nième d'une homographie. Posons donc $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$:*

$$t = \frac{u^2+1}{-u^2+1} \qquad dt = \frac{4u}{(1-u^2)}du$$

Donc

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du$$

et en décomposant en éléments simples cette fraction rationnelle,

$$\frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u-1} - \frac{2}{u^2+1}$$

on trouve finalement :

$$\mathrm{I} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{3}$$

Exercice 3.20 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

Solution : *On primitive une fraction rationnelle en x et une racine d'un trinôme qui est déjà réduit sous forme canonique. Le changement de variables $x=\mathrm{sh}\,t$ donne*

$$\mathrm{G}(t)=\int \frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}\,t+\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t=\int \frac{e^t+1/e^t}{2e^t}=\frac{t}{2}-\frac{e^{-2t}}{4}$$

En remplaçant t par $\mathrm{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$*, on trouve que*

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2}$$

Exercice 3.21 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ *sur l'intervalle* $\mathrm{I}=]1,+\infty[$.

Solution : *En multipliant par les quantités conjuguées :*

$$\mathrm{F}(x)=\int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\,\mathrm{d}x$$

on se ramène au calcul de deux primitives simples. Le plus rapide consiste à intégrer par parties pour calculer $\mathrm{G}(x)=\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ *et* $\mathrm{H}(x)=\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$*. On trouve finalement :*

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\mathrm{argsh}\,x+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)$$

Exercice 3.22 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$.

Solution : *La fonction à primitiver ne fait pas partie des classes connues. Essayons le changement de variables $z=x^2$. On se ramène à primitiver* $\mathrm{G}(z)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{z^{3/2}(1+z)^{3/2}}$*. En écrivant*

$$\mathrm{G}(z)=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^3\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^{3/2}}$$

On se ramène à une primitive de la forme $\displaystyle\int \mathrm{F}(z,\sqrt[n]{\tfrac{az+b}{cz+d}})\,\mathrm{d}z$ *que l'on sait calculer avec le changement de variables* $y=\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}$, $z=\dfrac{1}{y^2-1}$, $\mathrm{d}z=-\dfrac{2y}{(y^2-1)^2}$*. On se ramène à calculer*

$$\mathrm{H}(y)=-\int \frac{y^2-1}{y^2}\,\mathrm{d}y=-y-\frac{1}{y}$$

d'où finalement,

$$\mathrm{F}(x)=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 3.23 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *sur l'intervalle* $\mathrm{I}=]-1,1[$.

Solution : *La fonction à primitiver ne fait pas partie des classes qu'on a vues. Essayons d'éliminer une racine carrée avec le changement de variables* $x = \sin t$ *sur l'intervalle* $\mathrm{J} =]-\pi/2, \pi/2[$ *:*

$$\mathrm{G}(t) = \int \frac{\sqrt{1+|\cos t|}}{|\cos t|} \cos t \, \mathrm{d}t = \int \sqrt{1+\cos t} \, \mathrm{d}t$$

En effet, $\cos t > 0$ *sur* J*. On n'a toujours pas à primitiver une fonction qui entre dans les catégories connues. Avec la trigonométrie,* $1 + \cos t = 2\cos^2(t/2)$*, on a*

$$\mathrm{G}(t) = \sqrt{2} \int \cos(t/2) \, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} \sin(t/2)$$

d'où finalement

$$\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\arcsin(x)}{2}\right)$$

Annexe D

Conseils

Heureux comme une rivière
qui peut suivre son cours
sans sortir de son lit.
Graffiti anonyme en salle de classe. XX^e siècle.

D.1 Conseils d'étude

D.1.1 Attitude pendant le cours

Il est très important d'être parfaitement concentré pendant les heures de cours. Ne jamais vous dire que si vous ne comprenez pas quelque chose sur le moment, vous aurez le loisir de reprendre ce point chez vous. Un quart d'heure d'inattention vous prendra plus d'une heure à rattraper et vous n'aurez matériellement pas le temps de combler ces lacunes plus tard. Il est donc important de se présenter au cours en bonne condition ; pour cela il est indispensable d'adopter un rythme de vie équilibré et en particulier de bien dormir pour arriver en cours parfaitement reposé.

En ce qui concerne la prise de notes, tout dépend de votre faculté à écrire rapidement. Votre professeur doit boucler un programme très chargé, et par moments il est obligé d'accélérer. Le plus important est de comprendre l'essentiel pendant le cours, quitte à ne pas tout écrire. Notez précisément les définitions et les énoncés des théorèmes, mais ne notez pas les phrases complètes pendant le cours, utilisez des abréviations. Il faut être en permanence attentif à ce que dit votre professeur et comprendre les idées qu'il exprime, quitte à ne pas tout noter.

Après chaque cours le soir, faites une synthèse de ce que vous avez vu pendant la journée en mettant en évidence les points importants. Vous devez vous présenter au cours suivant en ayant en tête les définitions du cours précédent. Le moindre retard dans votre travail peut avoir des répercussions importantes par la suite.

D.1.2 Bien comprendre les définitions et les hypothèses de théorèmes

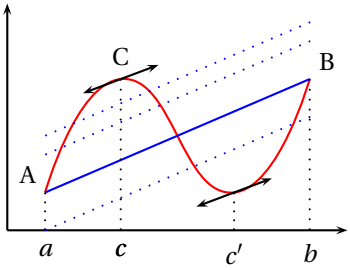
Les définitions ainsi que les théorèmes du cours sont très importants, vous aurez à les utiliser pendant les devoirs et elles vous serviront à comprendre la suite du cours. Une erreur fréquente consiste à vouloir aller trop vite lors des révisions en ne se contentant que d'une connaissance superficielle. Il est normal de passer du temps à bien réfléchir aux définitions et aux hypothèses des théorèmes. En particulier, prenez l'habitude de chercher vos propres exemples, contre-exemples et de faire le maximum de schémas pour vous imprégner de ces connaissances fondamentales.

Prenons l'exemple du théorème des accroissements finis :

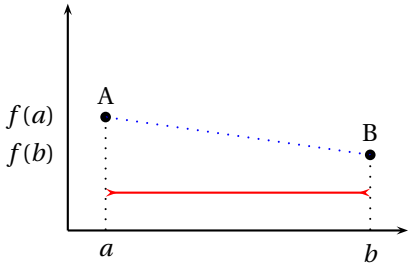
THÉORÈME 4.1 **Accroissements finis**
Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les hypothèses :

1. f est continue sur le segment $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$,

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.



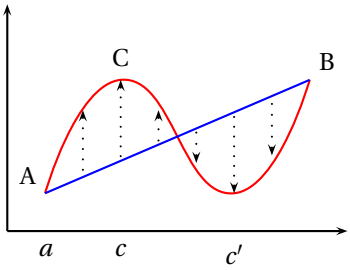
Pour comprendre ce théorème, essayons de visualiser le résultat. On peut écrire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la pente de la corde joignant les points A $= (a, f(a))$ et B $= (b, f(b))$. Le réel $f'(c)$ représente la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point C $= (c, f(c))$. Si l'on place une règle joignant les points A et B et qu'on déplace cette règle en maintenant sa pente, on va rencontrer au moins une tangente à la courbe. On voit sur notre dessin que le c du théorème n'est pas nécessairement unique.
Réfléchissons aux hypothèses du théorème. Pour parler de $f'(c)$ où $c \in]a,b[$, il faut supposer que f est dérivable sur $]a,b[$. Si l'on suppose uniquement que f est continue sur $]a,b[$, le résultat peut être faux comme le montre le contre-exemple suivant :



La conclusion du théorème dit qu'il existe un réel c *intérieur* au segment $[a,b]$. Le fait que $c \neq a$ et $c \neq b$ est important dans les applications. On peut se demander si ce théorème reste valable lorsque la fonction est à valeurs complexes. La réponse est négative. Si l'on considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array} \right.$, on a bien f qui est continue sur $[0,2\pi]$, f dérivable sur $]0,2\pi[$ mais $f(1) - f(0) = 0$ et pour tout $c \in]0,2\pi[$, $f'(c) = ie^{ic} \neq 0$.

D.1.3 Faire une synthèse des points importants d'une démonstration

Prenez l'habitude de *résumer* les points importants d'une démonstration en quelques phrases et schémas. C'est ainsi que vous les retiendrez sur le long terme. Prenons l'exemple du théorème des accroissements finis. Si l'on observe le schéma précédent, on s'aperçoit que le point C rend extrémale la hauteur entre la courbe et la corde [AB] ce qui nous conduit à introduire une bonne fonction auxiliaire.



L'équation de la corde s'écrit $y = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ d'où la fonction auxiliaire définie par

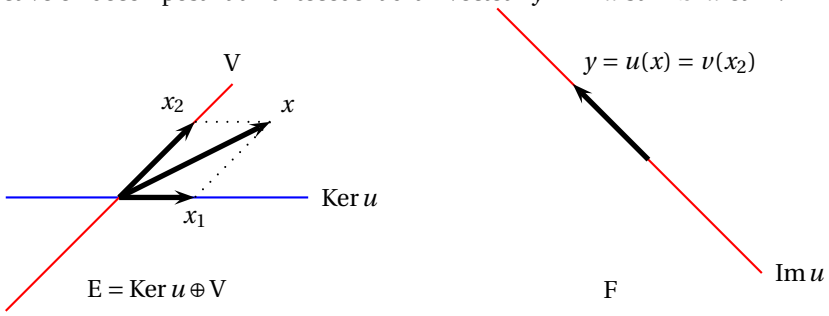
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On a $f(b) = f(a) = 0$ et il suffit d'appliquer le théorème de Rolle (en vérifiant les hypothèses) à cette fonction auxiliaire.
Sur une fiche, vous pouvez résumer les idées de cette démonstration :
– Introduire la fonction auxiliaire et faire le dessin ci-dessus.
– Vérifier les hypothèses de Rolle pour cette fonction auxiliaire.
– En déduire qu'elle admet un extremum.
Prenons un autre exemple typique, le théorème du rang :

THÉORÈME 4.2
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. On a la formule du rang :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$$

On résume la démonstration avec les points suivants :
– Vérifier que $\operatorname{Im} u$ est isomorphe à tout supplémentaire V de $\operatorname{Ker} u$.
– Pour vérifier cet isomorphisme, considérer la restriction v de u à V.
– Vérifier que v est surjective en décomposant un antécédent d'un vecteur $y \in \operatorname{Im} u$ sur $\operatorname{Ker} u$ et V :



– Utiliser que $\dim V = \dim \operatorname{Im} u$ et que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim V$.

D.2 Conseils de rédaction

Vous préparez des épreuves écrites de concours. Contrairement au baccalauréat, les examinateurs n'ont pas de consignes d'indulgence pour vous attribuer artificiellement des points, mais leur but est de vous classer par rapport aux autres candidats. Si vous rendez une copie mal rédigée, illisible où il manque des arguments essentiels, ou au contraire, si vous utilisez trois pages pour un calcul qui ne nécessite que deux lignes, vous serez inévitablement pénalisé. Il est très important de s'entraîner pendant les deux années de préparation à rédiger de façon correcte vos devoirs pour prendre de bonnes habitudes et être bien préparé pour les concours. Voici quelques mauvaises habitudes à perdre :
– Écrire directement sur votre copie la première idée qui vous passe par la tête (quelquefois au crayon de papier ...)
– Commencer une phrase ou une démonstration et s'arrêter en plein milieu ! Au lieu de montrer votre inconsistance au correcteur (n'espérez pas gagner quelques centièmes de points ainsi), mieux vaut ne rien écrire.
– Effectuer un calcul directement sur votre copie en détaillant toutes les étapes de façon maladroite.
– Sauter une question dont vous ne trouvez pas la solution immédiatement, quitte à y revenir ensuite en écrivant dans la marge, en mettant une astérisque demandant au correcteur de se reporter à la dernière page ...
– Utiliser des formules de type « c'est évident », « trivialement »...
– Citer vaguement un théorème : « d'après un théorème »sans vérifier ses hypothèses d'application.
– Écrire de façon très compacte sans jamais passer à la ligne. Les quelques centimes d'euros que vous économisez en feuilles n'intéresseront certainement pas votre correcteur qui tient à sa vue !
– Écrire trop gros en utilisant quelques dizaines de feuilles doubles pour un problème qui n'en nécessite que deux.
Il faut au contraire :
– **Utiliser impérativement un brouillon** sur lequel vous pouvez chercher les idées de démonstrations, faire des calculs longs ...C'est uniquement une fois que vous avez les idées claires sur la façon de procéder que vous rédigez au propre le calcul ou la démonstration.
– Si vous vous apercevez que vous avez fait une erreur, n'utilisez pas l'effaceur ni le blanco (perte de temps et souvent illisible), mais barrez proprement ce que vous avez écrit et recommencez.
– Une fois que vous avez trouvé une idée de preuve, prenez le temps de vous demander s'il n'y a pas moyen de la simplifier encore. Repérez les points importants qu'il faudra mettre en évidence au propre, ainsi que les détails que vous pourrez minimiser dans la rédaction définitive. Faites de même pour un calcul, ne recopiez pas toutes les étapes, mais uniquement les plus importantes.
– **Encadrez les résultats de calculs** demandés.
– Ne cherchez pas à grappiller des points, mais traitez les questions les unes après les autres en passant un minimum de temps à chaque question. Ce temps n'est jamais perdu car vous aurez mieux assimilé l'énoncé, repéré que le résultat peut servir par la suite et vous serez moins bloqué sur les questions suivantes.
– Numérotez correctement les questions que vous traitez en laissant un espace blanc si vous n'avez pas trouvé le résultat. Vous pourrez compléter cet espace par la suite et le correcteur suivra votre copie selon l'ordre du problème.
– Pour rédiger une démonstration ou un calcul, passez souvent à la ligne, centrez des formules ...Le but est de mettre en évidence les points importants et de montrer à votre correcteur que vous les avez vus.

– Tirez un trait horizontal pour séparer chaque question, vous facilitez ainsi la lecture de votre copie.
– Si vous devez utiliser un résultat précédent du problème, citez précisément le numéro de la question où ce résultat a été démontré. De même, respectez scrupuleusement les notations de l'énoncé.
– Si vous utilisez un théorème du cours, citez-le précisément (il a souvent un nom), et surtout *vérifiez ses hypothèses précises* avant de l'appliquer (vous montrez ainsi que vous connaissez votre cours).
– Évitez trop de phrases longues et verbeuses, allez à l'essentiel. Au contraire, une copie avec uniquement des formules est illisible. Il faut savoir trouver le juste milieu. N'abusez pas des abréviations et essayez de rédiger des phrases simples mais correctes.
– N'utilisez jamais les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ dans vos démonstrations, mais des mots comme « donc », « par conséquent »…

Si on vous demande une démonstration, commencez par travailler au brouillon :
– Bien analyser l'énoncé pour comprendre ce que vous devez montrer. Demandez-vous la nature de chaque objet manipulé (vecteur, application …).
– Écrire le plan de démonstration au brouillon.
– Chercher un brouillon l'idée de la démonstration. Pour cela,
  – Essayez de voir un lien entre le résultat à démontrer et un point du cours ou une question précédente du problème.
  – Faites éventuellement des schémas pour trouver l'idée.
  – N'hésitez pas à chercher un exemple ou à traiter la question dans un cas plus simple, ou à faire des hypothèses supplémentaires.
– Demandez-vous dans quel ordre vous devez introduire les objets nécessaires.

Une fois que vous pensez que vous avez bien compris l'idée, vous pouvez rédiger au propre :
– Commencez par citer le résultat que vous allez démontrer.
– Si vous voulez montrer une équivalence ou une égalité d'ensembles, procédez systématiquement par double implication ou double inclusion.
– Rédigez la démonstration *en respectant le plan*.
– Mettez en évidence les points importants (en soulignant, en passant à la ligne …).
– Une fois votre preuve rédigée, relisez-la en vous assurant que chaque objet est bien introduit et que le plan a été respecté.
– Si un schéma n'est pas suffisant à lui seul, il peut illustrer votre démonstration. N'hésitez pas à le reproduire sur votre copie.

Annexe E

Formulaires

E.1 Trigonométrie

Formules d'addition

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$
$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)$$

Formules de factorisation

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x)&=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=2\cos^2 x-1\\&=1-2\sin^2 x\\\sin(2x)&=2\cos x\sin x\end{aligned}$$

Tangente du demi-angle

En notant $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

E.2 Trigonométrie hyperbolique

PROPOSITION 5.1 ♡

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad && \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad && \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \\
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad && \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1
\end{aligned}$$

PROPOSITION 5.2 ♡
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{ch}(x-y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y
\end{aligned}$$

PROPOSITION 5.3 ♡
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

PROPOSITION 5.4 ♡
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right] \\
\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right] \\
\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y)\right] \\
\operatorname{ch}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1) \\
\operatorname{sh}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)
\end{aligned}$$

PROPOSITION 5.5 ♡
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} \\
\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2} \\
\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} \\
\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y &= 2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}
\end{aligned}$$

PROPOSITION 5.6 ♡
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$
$$\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

PROPOSITION 5.7 ♡
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posant $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, on a :

$$\operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

E.3 Dérivées des fonctions usuelles

Dans tout le formulaire, les quantitées situées au dénominateur sont supposées non nulles

Dérivées des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Domaine de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles

- $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to [1,+\infty[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{argch} : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.
- $\operatorname{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1,1[$.

- $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est dérivable sur $]-1,1[$.

- $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1,1[$.
- $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Domaine de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
a^x $(a>0)$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$\log_a x$ $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{sh^2(x)}$
$\mathrm{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argch}(x)$	$]+1,+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argth}(x)$	$]-1,1[$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opérations et dérivées

$(f+g)' = f'+g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$, λ désignant une constante

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\boxed{(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$

$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$ $(n \in \mathrm{N},\ n \geqslant 1)$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

En particulier,si $u > 0$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{(u^a)' = \alpha u' u^{a-1}}$

E.4 Primitives des fonctions usuelles

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont uniques à une constante près notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x\ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont uniques à une constante près notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
a^x $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
x^α $(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x) + C$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x) + C$
$1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{argsh}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]+1, +\infty[$	$\mathrm{argch}(x) + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1, 1[$	$\mathrm{argth}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln\lvert u\rvert$.

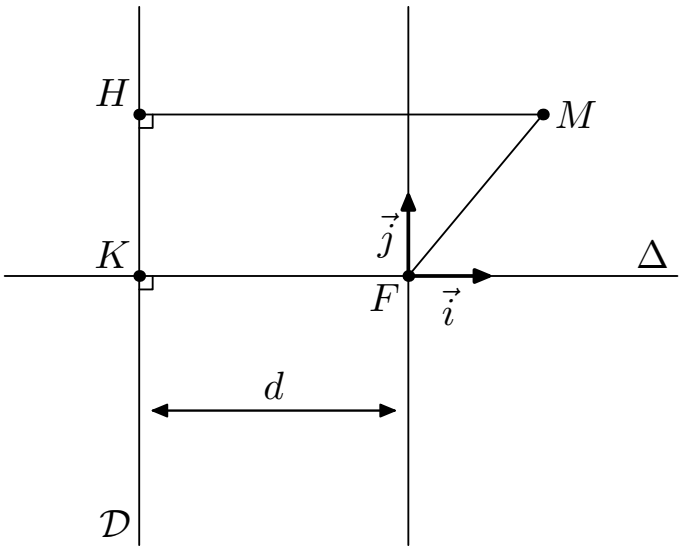
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + \mathrm{C} & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u + \mathrm{C} & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

E.5 Coniques

E.5.1 Définition et équation générale d'une conique $\mathscr{C}$



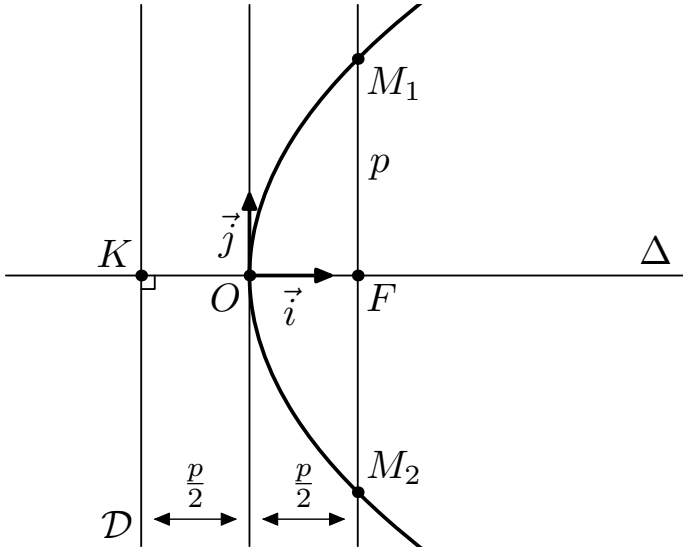
Soit $\mathscr{D}$ une droite, F un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et e un réel strictement positif.
La conique de directrice $\mathscr{D}$, de foyer F et d'excentricité e est donnée par l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(\mathrm{M},\mathrm{F}) = e\, d(\mathrm{M},\mathscr{D})$$

L'équation cartésienne de cette conique dans le repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ est :

$$x^2 + y^2 = e^2\ (x+d)^2$$

E.5.2 Parabole $\mathscr{P}$ ($e = 1$)



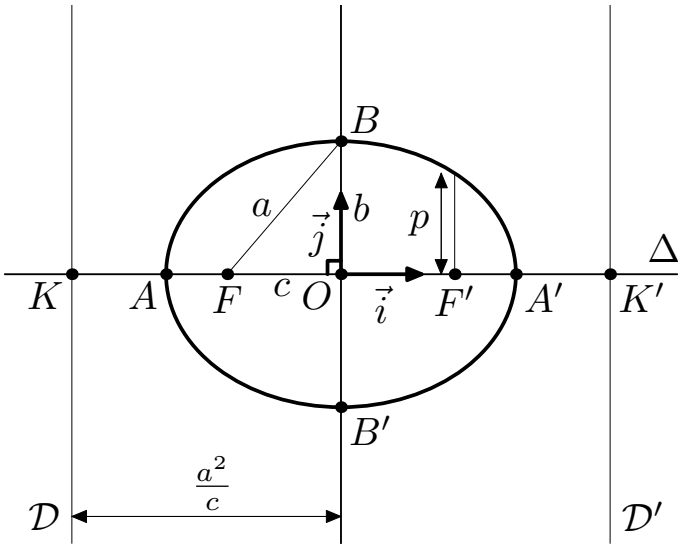
$$y^2 - 2px = 0$$

$$p = d(\mathrm{F},\mathscr{D})$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{p\,t^2}{2} \\ y(t) = p\,t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{D} : \ x = -\frac{p}{2}$$

E.5.3 Ellipse $\mathscr{E}$ ($0 < e < 1$)



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{1-e^2}} \qquad c = \frac{e^2 d}{1-e^2} \text{ où } d = d(\mathrm{F},\mathrm{D})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad c = ea$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad d = \frac{b^2}{c}$$

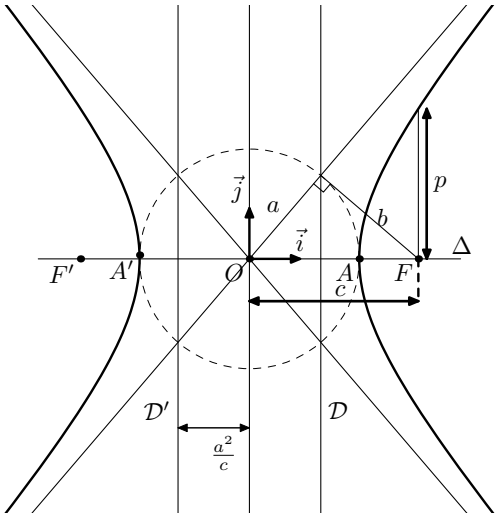
$$\mathrm{OA} = a \qquad \mathrm{OB} = b$$

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} : t \in [-\pi, \pi]$$

$$\mathscr{D} : \ x = -\frac{a^2}{c}$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \iff \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$$

E.5.4 Hyperbole $\mathscr{H}$ ($e > 1$)



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$a = \frac{ed}{e^2-1} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{e^2-1}} \qquad c = \frac{e^2 d}{e^2-1} \text{ où } d = d(\mathrm{F},\mathrm{D})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c = ea$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad h = \frac{b^2}{c}$$

$$\mathrm{OF} = c \qquad \mathrm{OA} = a$$

$$\begin{cases} x(t) = a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases} : t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t) = -a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{D} : \ x = \frac{a^2}{c}$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \iff \left|\mathrm{MF}' - \mathrm{MF}\right| = 2a$$

E.6 Limites usuelles

Limites usuelles

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad \frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

De manière plus générale

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- En 0 et $-\infty$:

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad |x|^\alpha e^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Suite géométrique

$$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \text{diverge si } a \in]-\infty,-1] \\ 0 \text{ si } a \in]-1,1[\\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\end{cases}$$

E.7 Équivalents usuels et croissances comparées

Comparaison des suites de référence

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors :

$$(\ln n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\beta\right) \qquad n^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}\left(a^n\right) \qquad a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!) \qquad n! = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^n\right)$$

Équivalents classiques pour les suites

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors :

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad [1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \left[e^{u_n}-1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \left[(1+u_n)^\alpha - 1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

Comparaison des fonctions usuelles

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$$(\ln x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma x}\right)$$

- En 0 et $-\infty$:

$$|\ln x|^\beta = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad e^{\gamma x} = \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

Équivalents classiques pour les fonctions en 0

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{x\to0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \operatorname{argsh} x \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \operatorname{argth} x \underset{x\to0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

De manière plus générale

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors :

$$\ln\big(1+f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \sin\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \tan\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

$$\cos\big(f(x)\big)-1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2} \qquad e^{f(x)}-1 \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \big(1+f(x)\big)^{\alpha}-1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x) \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

E.8 Développements limités

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned}
\heartsuit \quad \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)\\
\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)\\
\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4\cdots+x^{2n}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^{2n}\big)
\end{aligned}$$

Fonctions exponentielle et hyperboliques

$$\begin{aligned}
\heartsuit \quad e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)\\
\heartsuit \quad \operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^{2n+1}\big)\\
\heartsuit \quad \operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^{2n+2}\big)\\
\rightsquigarrow \quad \tanh x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^6\big)
\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}
\heartsuit \quad \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^{2n+1}\big)\\
\heartsuit \quad \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^{2n+2}\big)\\
\rightsquigarrow \quad \tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^6\big)
\end{aligned}$$

Fonction logarithme

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)\\
\heartsuit \quad \ln(1-x) &= -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)+\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)
\end{aligned}$$

Fonction $x\mapsto(1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\heartsuit \quad (1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)$$

Cette dernière formule appliquée à $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 2$ donne :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Fonctions réciproques

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\rightsquigarrow \quad \operatorname{argth} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\rightsquigarrow \quad \arcsin x &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\rightsquigarrow \quad \operatorname{argsh} x &= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\rightsquigarrow \quad \arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} - \cdots + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

La dernière s'obtient en remarquant que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
Légende : ♡ = à savoir par coeur, $\rightsquigarrow$ = à savoir retrouver rapidemment.

E.9 Espaces vectoriels

Dans tout la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$. $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$, une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E si et seulement si :

1. $F \neq \varnothing$
2. F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha x + \beta y \in F$$

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0 \in F$.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soient n vecteurs de E : $v_1, \ldots, v_n$. On a :

$$Vect(v_1, \ldots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \ldots, v_n$.

Sous-espaces supplémentaires

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** si et seulement si ils vérifient :

(H1) $E = F + G$

(H2) $F \cap G = \{0\}$

Caractérisation des sous-espaces supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. On a équivalence entre :

1. $E = F \oplus G$ (c'est à dire F et G sont supplémentaires).
2. $\forall x \in E, \quad \exists!\,(x_1,x_2) \in F \times G : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est à dire, **tout** vecteur de E se décompose de manière **unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Dans toute la suite $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Application linéaire

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \boxed{f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)}$$

Á propos de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle :

1. – **Noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}\, f$ le sous-ensemble de E : $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 0_\mathrm{F}\}}$
   – **Image de** f et on note $\mathrm{Im}\, f$ le sous-ensemble de F : $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\}}$.
2. $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{F}$.

Projecteurs et symétries

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ s'écrit d'une manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{E}_1$ et $x_2 \in \mathrm{E}_2$. Soit p et s deux applications de E dans E. On dit que :

1. p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 si $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$
2. s est une symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 si $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$

Propriétés des projecteurs et des symétries

Avec les notations de l'encadré précédent :

1. p et s son linéaires : $p, s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. $s = 2p - \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
3. $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{E}_1$.
4. $\mathrm{Ker}\, s = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, s = \mathrm{E}$ (autrement dit s est un automorphisme de E).
5. $p(x) = x \iff x \in \mathrm{E}_1$ (E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

Caractérisations des projecteurs et des symétries

Soient $p, s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
2. s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}$.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E

1. On montre que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
2. On montre que $\mathrm{F} \neq \varnothing$ (la pluspart du temps on montre que $0 \in \mathrm{F}$).
3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(u, v) \in \mathrm{E}^2$. On montre que $\alpha u + \beta v \in \mathrm{F}$.

Pour montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrons que la somme est directe : Il faut donc montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. ... donc $x = 0$.
2. Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$: Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons $x_1 = \ldots$. Posons $x_2 = \ldots$. On a bien :

1. $x_1 \in F$.
2. $x_2 \in G$.
3. $x = x_1 + x_2$.

4 méthodes pour montrer qu'une partie F de E est un sev de E

Soit F une partie de E. Pour montrer que F est un sev de E, on peut :

1. Montrer que F est non vide et stable par combinaison linéaire.
2. Montrer que $F = Vect(A)$ où A est une famille de vecteurs de E à déterminer.
3. Montrer que $F = \text{Ker } f$ où f est une application linéaire à déterminer.
4. Montrer que $F = \text{Im } f$ où f est une application linéaire à déterminer.

Pour montrer qu'une application est linéaire

Soit $f : E \to F$.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient $u, v \in E$.
2. Montrons que : $\boxed{f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)}$

Remarque : si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.

Pour montrer qu'un endomorphisme ...

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. f est **bijectif** si et seulement si il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{f \circ g = g \circ f = \text{id}}$. Si une telle application g existe alors $f^{-1} = g$.
2. f est une **projection** si et seulement si $\boxed{f \circ f = f}$.
3. f est une **symétrie** si et seulement si $\boxed{s \circ s = \text{id}}$.

Index

Symboles

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 1062
$\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ 1060
$[\![m, n]\!]$ 293

A

Abscisse curviligne 626
Addition
  matricielle 936
Affinité
  orthogonale 262
Affixe
  d'un point du plan 7
  d'un vecteur 7
Aire
  d'un domaine plan 688, 690
Algorithme
  d'Euclide 736
  d'exponentiation rapide 725
  de Horner 760
  de Schmidt 1052
Alignement de trois points 1033
Analyse-synthèse 1125
Angle
  de deux vecteurs 1061
Angles
  moitiés 14
Anneau 709
  intègre 710
  sous-anneau 711
Antisymétrie
  du déterminant de deux vecteurs 57
Application 1122
  affine 1089
  bijective 1127
  composée 1123
  identité 844, 1122
  injective 1123
  linéaire 842
  surjective 1124
Approximation
  décimale des réels 350
  des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier 508
  projecteur orthogonal 1056
Arc paramétré
  longueur 625
Argument
  d'un nombre complexe 15
  principal d'un nombre complexe 15
Arrangement 298
Associative
  loi 703
Astroïde 228, 626, 630
Asymptote 158, 222
Asymptotes
  de l'hyperbole 265
Automorphisme 707
  affine 1090
  d'espaces vectoriels 842
Axe
  d'un repère du plan 49
  demi-axe focal 265
  demi-axe focal de l'ellipse 261
  demi-axe non focal 265
  demi-axe non focal de l'ellipse 261
  demi-grand axe 265
  demi-grand axe de l'ellipse 261
  demi-petit axe 265
  demi-petit axe de l'ellipse 261
  focal 257
  focal de l'ellipse 261
  focal de l'hyperbole 265
  grand axe de l'ellipse 261
  grand axe de l'hyperbole 265
  non focal de l'ellipse 261
  non focal de l'hyperbole 265
  non transverse de l'hyperbole 265
  petit axe de l'ellipse 261
  polaire 53
Axiome
  de la borne supérieure 327

B

Barycentre 1086
Base
  canonique de $\mathbb{K}^n$ 885
  canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ 885
  canonique de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ 936
  d'un espace vectoriel 884
  de l'espace 99
  de même sens ou de sens contraire 965
  directe de l'espace 100
  du plan 48
  indirecte de l'espace 100
  orthogonale 1051
  orthogonale du plan 48
  orthonormale 1051

orthonormale du plan 48
repère cartésien dans un espace affine 1088
Bicorne 242
Bifocale
Définition bifocale de l'ellipse 266
Définition bifocale de l'hyperbole 266
Bijection 1127
réciproque 1127
théorème de la 136
Bilinéarité
du déterminant 58
du produit scalaire 55, 105
Borne inférieure 327
Borne supérieure 327
Branche
infinie 158, 222
parabolique 223

C

Caractérisation
de la borne supérieure 327
séquentielle de la limite 651
Caractérisation de la fonction exponentielle
par une équation différentielle 183
Caractérisation de la fonction exponentielle
par une équation fonctionnelle 184
Cardinal 293
Cardioïde 631, 688
Cauchy-Schwarz 1048
Centre
de courbure 631
de l'ellipse 261
de l'hyperbole 264
Cercle 65
principal d'une ellipse 262
Cesáro 1138
Champ de vecteurs 688
Changement
de paramétrage 625
de repère 52
de repère orthonormal 52
de variable dans une intégrale 518
Changement de variables
intégrale double 686
Coefficients
binomiaux 301
Cofacteur 963, 1031
Comatrice 964, 1034
Combinaison
p-combinaison 298
linéaire 833, 882
Commutative
loi 703
Comparaison
des fonctions usuelles 415
des suites de référence 357
Complétion
d'une famille libre 886
Complexe
Argument d'un nombre 15
module d'un nombre 8
Complexes
Corps des nombres complexes 4
Composante
d'une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ 216
Composantes
d'un vecteur relativement à une base 885
Composé
nombre 741
Composée 1123
Composition
de polynômes 756
Condition
initiale 185, 195
Congruence 734
Conique 257
Conjugué
d'un nombre complexe 6
Continuité
à droite 408
à gauche 408
d'une fonction en un point 408
de la composée de deux applications 411
de la composée de deux fonctions 419
uniforme 423
Convergence
d'une suite géométrique 352
Convexe
partie 1088
Coordonnées
d'un point dans un repère d'un espace affine 1088
d'un point dans un repère de l'espace 101
d'un vecteur relativement à une base 885
polaire d'un point 53
Coordonnées cartésiennes
d'un point 49
d'un vecteur 49
Coplanaires
vecteurs 99
Corps 711
archimédien 329
Cosinus 146
hyperbolique 151
Courbe
développée 634
de Lissajoux 237
intégrale 184, 195
paramétrée 218
Courbure 628
centre de 631
Critère
de convergence d'une suite 348
de divergence d'une suite 348
Cycle 1019
longueur 1019
support 1019
Cycloïde 229

D

Décompositon
rotation 1062
Décomposition

d'un entier en produit de facteurs premiers 742
d'une permutation en cycles 1019
d'une permutation en transpositions 1020
en éléments simples 800
en facteurs premiers 742
Degré
d'un polynôme 754
d'une fraction rationnelle 798
Dense
partie 330
Déplacement 1095
Dérivabilité
d'une fonction réelle 216
d'une fonction sur un intervalle 457
d'une fonction vectorielle 216
d'une fonction vectorielle sur un intervalle 216
Dérivée
d'une composée 657
d'une fraction rationnelle 798
des fonctions composées 458
partielle d'une composée 658
selon un vecteur 653
Dérivées
successives 464
Déterminant
d'ordre 2 et 3 d'une famille de vecteurs 959
d'un endomorphisme 961, 1027
d'un système de deux équations à deux inconnues 58
d'une matrice carrée 1028
d'une matrice de taille 2 ou 3 958
d'une matrice triangulaire 1030
d'une transposée 1030
développement selon une ligne, colonne 1032
dans une base 1025
de Cauchy 1041
de deux vecteurs 56
de Vandermonde 979, 1033
Développée
d'une courbe 634
Développement
d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne 963
déterminant 1032
limité 581
limité à l'ordre 1 d'une fonction d'une variable réelle 456
limité d'ordre 1 pour une fonction de deux variables réelles 656
Développement limité
composée de 585
primitive de 587
quotient de 586
somme et produit de 585
Dichotomie 420
Difféomorphisme 624, 665
Différentielle 657
extremum local 658
Dimension
d'un espace vectoriel 888
Direct
repère orthonormal 49
Directrice 257
Discriminant 20
Distance
d'un point à un plan 115
d'un point à une droite 62
d'un point à une droite de l'espace 117
entre deux droites non parallèles 118
entre deux réels 326
Divergence
d'une suite 346
Divisibilité
dans $\mathbb{K}[X]$ 756
dans $\mathbb{Z}$ 733
Division
selon les puissances croissantes 757
Division Euclidienne
dans $\mathbb{K}[X]$ 756
dans $\mathbb{Z}$ 735
quotient 735
reste 735
Domination
d'une fonction par une autre 414
d'une suite par une autre 353
Droite
affine du plan 48
asymptote 222
numérique achevée 328
perpendiculaire commune 117
vectorielle 836
vectorielle du plan 48
Droite de Simson 89
Droites
orthogonales 48
parallèles 48
perpendiculaires 48
Dual 1054

E

Égalité
du parallélogramme 1048
Élément
neutre 703
Nilpotent 710
orbite d' 1019
plus grand 327
plus petit 327
symétrisable 704
Ellipse 257
définition bifocale 266
paramétrage de l' 262
Endomorphisme 707
d'espaces vectoriels 842
orthogonal 1057
Ensemble
fini 293
infini 293
Ensembles
équipotents 293
Équation
aux dérivées partielles 663
caractéristique 195, 898
cartésienne d'un sous ensemble du plan 52

linéaire 845
normale d'un plan dans l'espace 113
normale d'une droite 63
polaire d'une conique 258
réduite d'une parabole 259
réduite de l'ellipse 260
réduite de l'hyperbole 263
Équation cartésienne
d'un cercle 66
d'un plan dans l'espace 113
d'une conique 258
d'une droite 61
Équation différentielle
homogène 184, 195
linéaire du premier ordre 184
linéaire du second ordre 195
normalisée 184
sans second membre 184, 195
Équation polaire 54
d'une droite ne passant pas par le pôle 65
d'un cercle passant par l'origine d'un repère 67
d'une droite passant par le pôle 64
Equivalentes
fonctions 416
suites 354
Équivalents
classiques en 0 418
usuels pour les suites 357
Espace
affine 1084
euclidien 1047
préhilbertion réel 1047
vectoriel 830
vectoriel $\mathbb{K}^n$ 831
vectoriel de dimension finie 886
vectoriel de fonctions 832
vectoriel des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ 832
Espace vectoriel 48
Excentricité 257
Exponentielle
de base a 142
imaginaire 11
néperienne 140
Extremum
d'une fonction d'une variable réelle 400
local d'une fonction d'une variable réelle 400

F

Factorielle 292
Factorisation
par les angles moitiés 14
Faisceau
de plan issu d'une droite 128
Famille 1131
de parties 1131
génératrice de vecteurs 884
liée de vecteurs 883
libre de vecteurs 883
linéairement dépendante 883
linéairement indépendante 883
Fermat
nombre de 748
petit théorème de 749
Folium de Descartes 235
Fonction
argch 1154
argsh 1154
k fois dérivables 217
arcosinus 148
arcsinus 147
arctangente 150
argument cosinus hyperbolique 156
argument sinus hyperbolique 154
argument tangente hyperbolique 157
bornée 400
continue par morceaux sur un intervalle 511
continue par morceaux sur un segment 506
continue sur un intervalle 418
coordonnée 216
croissante 401
décroissante 401
définie par une intégrale 517
dérivable à droite 454
dérivable à gauche 454
dérivable en un point 455
dérivable sur un intervalle 457
de classe $\mathscr{C}^k$ 217
de classe $\mathscr{C}^n$ 465
de classe $\mathscr{C}^1$ 655
de Leibniz 1086
deux fois dérivable 464
dominée par une autre 414
en escalier 504
exponentielle complexe 16
impaire 401
lipschitziennes 402
majorée 400
minorée 400
monotone 401
négligeable devant une autre 414
périodique 402
paire 401
plan d'étude 159
polynomiale 758
puissance 143
strictement croissante 401
strictement monotone 401
tangente 146
uniformément continue 423
vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ 216
Fonctions
équivalentes 416
usuelles, comparaison 415
Forme
n-linéaire 1023
n-linéaire alternée 1024
n-linéaire antisymétrique 1024
n-linéaire symétrique 1024
linéaire 842, 1054
multilinéaire alternée 959
Formule
d'Al-Kashi 82

de changement de base 1026
de changement de base pour le déterminant d'une famille de vecteurs 960
de changement de base pour un endomorphisme 953
de changement de base pour un vecteur 952
de changement de base pour une application linéaire 952
de changement de base pour une forme linéaire 953
de Green-Riemann 690
de Heron 44, 82
de Leibniz 465
de Leibniz pour les polynômes 762
de Machin 171
de Moivre 13
de Stirling 391
de Taylor avec reste intégral 522
de Taylor avec reste intégral pour les fonctions de deux variables réelles 662
de Taylor pour les polynômes 762
de Taylor-Young 524
de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions de deux variables réelles 663
du binôme 1144
du binôme de Newton 300, 710
du rang 896
Formules
d'Euler 13
de Cramer 967, 1029
de Frenet 628
de Taylor complexes 644
Foyer 257
Fraction rationnelle 797
décomposition en éléments simples 800
dérivée 798
degré 798
pôle 798
partie entière 799
partie polaire 799
Frenet
formules de 628
repère 627

G

Gradient 657
Gronwall
Lemme de 563
Groupe 704
$\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 9
alterné 1022
calcul dans un 706
commutatif 47
de Klein 714
de Lorentz 1000
des translations 1091
linéaire 845
orthogonal 1058, 1060, 1062
permutations 1018
produit 706
symétrique 1018

H

Hadamard
lemme d' 986
Homomorphisme 707
Homothétie 22, 1091
vectorielle 844
Hyperbole 257
équation réduite de l' 263
équilatère 276
centre 264
définition bifocale 266
paramétrage 265
sommet 265

I

Identité 844, 1122
de polarisation 1048
Image
d'un intervalle par une application continue 421
d'un nombre complexe 7
d'une application linéaire 843
directe 1129
réciproque 1128
Inégalité
arithmético-géométrique 308, 470
de Cauchy-Schwarz 513, 1048
de la moyenne 513
de Minkowski 513, 1049
de Taylor-Lagrange 523
des accroissements finis 462
triangulaire pour une norme 1049
Inégalités
triangulaires 9, 326
Injection 1123
Intégrale
calcul approché 527
d'une fonction complexe 643
d'une fonction continue par morceaux sur un segment 509
d'une fonction en escalier 505
d'une fonction périodique 519
d'une fonction paire ou impaire 520
de Wallis 569
Intégration
par parties 518
Interprétation cinématique 218, 462
Intersection
de deux droites 65
d'un cercle et d'une droite 68
Intervalle 329
Invariance
de l'intégrale par translation 514
Inverse
à droite 897
à gauche 897
Isobarycentre 1088
Isométrie 1057
affine 1093
directe 1060
indirecte 1062
matrice 1059

Isomorphisme 707
affine 1090
d'espaces vectoriels 842

J

Jacobien 686
Jordan
Matrice de 992

L

Leibniz
fonction de 1086
Lemme
d'augmentation d'une famille libre 886
d'Hadamard 986
de diminution d'une famille liée 886
de Lebesgue 1179
de Steinitz 887
des trois pentes 467
Lemniscate de Bernoulli 238
Ligne
de niveau 59
Limaçon de Pascal 254
Limite
à droite 408
à gauche 408
conservation des inégalités par passage à la 345
d'une famille de droites 218
d'une fonction en un point 403, 405
d'une suite 341
infinie d'une fonction en un point 404
Linéarité
de l'intégrale 510
Lipschitzienne
Continuité d'une fonction 419
Liste
p-liste 297
Logarithme
décimal 141
de base *a* 141
népérien 137
Logarithmique
Critère de comparaison 356
Loi
associative 703
commutative 703
de composition interne 4, 702
Longueur
d'un arc paramétré 625
Lorentz
Groupe de 1000

M

Majorant 327
Maple
combine 1151
convert parfrac 1211
diff 1183
evalm 939
expand 1157
factor 1157, 1183
GramSchmidt 1054
int 1211
matrix 939
series 1195
transpose 939
Matrice 935
élémentaire 936
antisymétrique 949
carrée 935
colonne 935
d'un endomorphisme dans une base 944
d'un système linéaire 965
d'un vecteur relativement à une base 940
d'une application affine 1090
d'une application linéaire relativement à deux bases 941
d'une famille de vecteurs relativement à une base 940
d'une forme linéaire relativement à une base 941
de changement de base 950
de Jordan 992
de passage 1059
diagonale 948
identité 935
inverse 1034
inversible 944
ligne 935
nulle 935
orthogonale 1058
scalaire 948
spéciale orthogonale 1060
symétrique 949
transposée 938
triangulaire supérieure 948
Maximum
d'une fonction d'une variable réelle 400
local d'une fonction d'une variable réelle 400
Médiateur
plan 126
Mesure algébrique 54, 1099
Méthode
d'intégration par parties 518
des rectangles 527
du pivot de Gauss 967
Mineur 963, 1031
Minimum
d'une fonction d'une variable réelle 400
local d'une fonction d'une variable réelle 400
Minkowski 1049
Minorant 327
Module
d'un nombre complexe 8
Morphisme
d'espaces vectoriels 842
de groupes 707
Multiplication
d'une matrice par un scalaire 936

N

Nombre
complexe 4
composé 741

de Fermat 748
de Neper 138
imaginaire pur 6
premier 741
Nombres
premiers entre eux 737
Normal
vecteur normal à un plan 99
Norme
associée à un produit scalaire 1048
Notation
$\prod$ 291
$\sum$ 291
Noyau
d'un morphisme 708
d'une application linéaire 843

O

Opération
élémentaire 1029
élémentaire sur les colonnes 951
élémentaire sur les lignes 951
Opérations
sur les dérivées 457
sur les fonctions 399
sur les polynômes 753
sur les suites 340
Orientation
d'un arc paramétré 625
du plan ou de l'espace 965
Origine
repère cartésien dans un espace affine 1088
Orthogonal
d'une partie d'un espace vectoriel 1051
groupe 1060
Orthogonale
matrice 1058
Orthogonalité 1050
de deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel 1050
Schmidt 1052
Orthoradial
vecteur 230

P

Parabole 257
Paramétrage
admissible 625
de la parabole 260
normal 627
Paramètre
angulaire 627
d'une conique 257
Partie
entière d'un réel 330
principale d'un développement limité 581
régulière d'un développement limité 581
Permutation
circulaire 1019
inversion 1021
signature 1021
PGCD 736, 767
Plan
médiateur 126
tangent à une sphère 120
vectoriel 836
Plan de démonstration 1116
Plans
parallèles 114
perpendiculaires 114
Plus grand élément 327
Plus petit élément 327
Point
anguleux 456
critique 658
régulier 219
stationnaire 219
Pôle 53
Polynôme 752
conjugué 764
dérivé 761
dérivé d'ordre n 761
irréductible 765
normalisé 754
réciproque 781, 786, 1161
scindé sur $\mathbb{K}$ 763
symétrique élémentaire 766
Polynômes
associés 756
de Tchebychev 987, 1150
premiers entre eux 768
Potentiel scalaire 689
PPCM 736, 769
Prédicat 1115
Premier
nombre 741
Prépondérance
d'une fonction devant une autre 414
d'une suite devant une autre 354
Preuve
par neuf 735
Primitive
d'un développement limité 587
d'une fonction 515
Principe
de récurrence 290
des tiroirs 295
Problème
de Cauchy 185
Produit
cartésien 4
d'espaces vectoriels 831
de matrices élémentaires 938
matriciel 937
scalaire 54
Produit scalaire 1047
orthogonalité 1050
Projecteur 847
orthogonal 1055
Projection
affine 1091
affine orthogonale 1094
orthogonale 54

Prolongement
par continuité 409
Propriété
d'Archimède 329
vraie à partir d'un certain rang 341
vraie au voisinage d'un point 403
Puissance
d'un point par rapport à un cercle 90
Pythagore
théorème de 1050

Q

Quantificateur 1115
Quantité conjuguée 1194

R

Racine
n-ième d'un nombre complexe 17
n-ième de l'unité 17
carrée d'un nombre complexe 19
d'ordre *p* 760
d'un polynôme 759
double 760
multiple 760
simple 760
Rang
d'un système linéaire 965
d'une application linéaire 895
d'une famille de vecteurs 895
d'une matrice 953
Réciproque
du théorème de Thalès 1099
Réflexion 1056, 1094
Règle
de l'Hospital 487
de Sarrus 110, 958, 1026
Règles
de calculs avec les matrices 938
Régulier
point 219
Relation
de Chasles 510
de Pascal 299
Relations
entre les coefficients et les racines d'un polynôme 766
Repère
axe d'un 49
cartésien 49
cartésien dans un espace affine 1088
Changement de 52
de Frenet 627
direct de l'espace 100
indirect de l'espace 100
origine d'un 49
orthogonal 49
orthonormal 49
orthonormal direct 49
Polaire 53
Repère orthonormal
Changement de 52
Représentation paramétrique
d'un cercle 66
d'une droite 60
Résolution
d'une équation du second degré à coefficients complexes 20
d'une équation du second degré à coefficients réels 20
Reste
d'un développement limité 581
euclidien 735, 756
Rotation 22
décompositon 1062
matrice 1065
vectorielle 1061
Rotationnel 689

S

Scalaire 830
Second membre
d'un système linéaire 965
Segment 329, 1088
Série
géométrique 352, 711
géométrique complexe 641
Similitude 1097
directe 1097
Similitude directe 23
Simson
Droite de 89
Sinus 145
hyperbolique 151
Solution
d'une équation différentielle linéaire du premier ordre 184
d'une équation différentielle linéaire du second ordre 195
Somme
binômiale 1144
de Newton 1163
de Riemann 528
de sous-espaces vectoriels 838
directe de sous-espaces vectoriels 839
géométrique 1144
Sommet
d'une parabole 259
de l'ellipse 261
de l'hyperbole 265
Sous-corps 711
Sous-espace vectoriel 833
engendré par une partie d'un espace vectoriel 836
orthogonal 1050
somme 838
Sous-espaces vectoriels
en somme directe 839
supplémentaires 840
Sous-groupe 706
Sphère 119
Stationnaire 219
Strophoïde droite 232
Subdivision
d'un intervalle 503

plus fine qu'une autre 503
subordonnée à une fonction continue par morceaux sur un segment 506
subordonnée à une fonction en escalier 504
Suite
arithmétique 292
bornée 340
complexe 640
constante 340
convergente 341
croissante 340
décroissante 340
définie par récurrence 291
de Cesáro 371
de Fibonacci 749, 898, 988
divergente 341
dominée par une autre 353
extraite 347
géométrique 292
géométrique complexe 641
majorée 340
minorée 340
monotone 340
négligeable devant une autre 354
réelle 339
strictement monotone 340
Suites
équivalentes 354
adjacentes 349
de références 357
Support
d'un arc paramétré 218
Surjection 1124
Symbole
de Kronecker 938, 1164
Symétrie 848
affine 1092
affine orthogonale 1094
du produit scalaire 55, 105
orthogonale 1056
Symétrique
d'un élément 704
Système
de Cramer 59, 967
homogène associé à un système linéaire 965
linéaire à n équations et p inconnues 965
linéaire compatible 965

T

Tangente
à la parabole 260
à un cercle 68
à une ellipse 262
en un point stationnaire 219
hyperbolique 153
Taux d'accroissement 454
Terme
dominant d'un polynôme 754
Thalès
Réciproque du théorème de 1099
Théorème de 1099
Théorème
Composition des fonctions continues 653
d'intégration par parties 518
d'opérations sur les dérivées 457
d'opérations sur les fonctions continues 419
d'opérations sur les fonctions de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$ 655
de Bézout 738
de Bolzano-Weierstrass 351, 641
de caractérisation séquentielle de la continuité 411
de Cesáro 371
de composition des limites 410
de d'Alembert-Gauss 763
de dérivation de la bijection réciproque 136, 137, 459
de dérivation des fonctions composées 458
de Fubini 685
de Gauss 739
de Heine 423
de la base incomplète 887
de la bijection 136, 424
de la limite monotone pour les fonctions 413
de la limite monotone pour les suites 348
de la limite séquentielle 411
de Lagrange 719
de majoration pour les fonctions de deux variables 651
de majoration pour les fonctions réelles 405
de majoration pour les suites complexes 640
de passage à la limite dans les inégalités 409
de Poincaré 689
de Pythagore 1050
de récurrence 290
de Rolle 460
de Schmidt 1052
de Schwarz 661
de Thalès 1099
des accroissements finis 461, 1228
des gendarmes pour les fonctions 410
des gendarmes pour les suites 345
des segments emboîtés 351
des valeurs intermédiaires 419, 421
fondamental de l'algèbre 763
fondamental de l'analyse 516, 644
formule de Taylor avec reste intégral 522
formule de Taylor-Young 524
inégalité des accroissements finis 462
petit théorème de Fermat 749
relèvement 627
Trace
d'une matrice carrée 947
Translation 22
affine 1090
Transposée
d'une matrice 938
Transposition 1020
Triangle
de Pascal 299
Trifolium 250
Troncature
d'un développement limité 582

U

Uniforme
    continuité 423

V

Valeur
    absolue 326
    décimale approchée 350
Valeur moyenne d’une fonction 514
Valuation
    d’un polynôme 755
Variable
    muette 1116
Variation
    de la constante 190
Vecteur 830
    colonne d’une matrice 935
    directeur 48
    ligne d’une matrice 935
    normal 62
    normal à un plan 99
    normal unitaire 106
    nul 830
    orthoradial 230
    symétrique 47
    unitaire 48, 1050
Vecteurs
    angle 1061
Vecteurs
    colinéaires 48
    coplanaires 99
Voisinage
    à droite 408
    à gauche 408
    d’un point 649
    d’un point dans $\mathbb{R}$ 403
    pointé d’un point 408
    strict à droite 408
    strict à gauche 408

W

Wallis
    intégrales de 390